Solutions - Exercices du chapitre 7 - multi-taux

1 Exercice 7.34

Question

Un signal $x(t) = 4000\text{sinc}^2(4000t)$ est échantillonné à 12 kHz pour obtenir $x[n]$ et ensuite on sur-échantillonne par un facteur N pour obtenir $y[n]$. Donner le spectre de $X(f)$ et de $Y(f)$ pour des facteurs N de 2 et 3.

Réponse

Si

$$x(t) = 4000\text{sinc}^2(4000t)$$

alors

$$X(f) = \text{tri}(f/4000)$$

et

$$X(F) = \text{tri}(FS/4000) = \text{tri}(F12000/4000) = \text{tri}(3F)$$

Lorsqu'on sur-échantillonne en temps, on compresse le spectre en fréquence. Ainsi, pour $N = 2$, $X(F)$ devient $\text{tri}(3NF) = \text{tri}(6F)$ qui se répète aux $F = \frac{1}{N} = \frac{1}{2}$. Pour $N = 3$, $X(F)$ devient $\text{tri}(3NF) = \text{tri}(9F)$ qui se répète aux $F = \frac{1}{N} = \frac{1}{3}$.

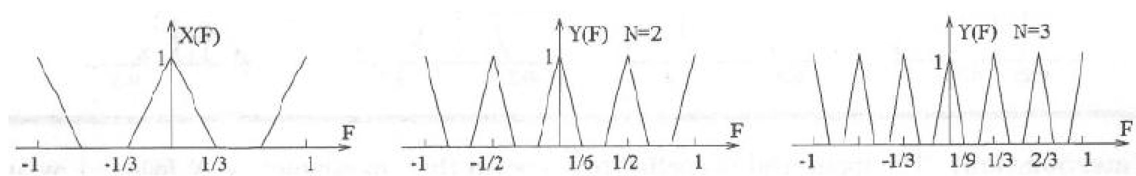

FIGURE 1 – $X(F)$ et $Y(F)$ pour $N = 2$ et $N = 3$.

2 Exercice 7.39

Question

Le signal $x[n]$ est sous-échantillonné par un facteur N pour obtenir le signal $y[n]$. Tracer les signaux $X(F)$ et $Y(F)$ pour
a) $x[n] = \text{sinc}(0.4n)$ et $N = 2$
b) $X(F) = \text{tri}(4F)$ et $N = 2$
a) $X(F) = \text{tri}(3F)$ et $N = 2$

Réponse

7.39 a)

La transformée de Fourier de $x[n] = \text{sinc}(0.4n)$ est $X(F) = 2.5\text{Rect}(2.5F)$. Lorsqu'on sous-échantillonne par un facteur N en temps, le spectre en fréquence est divisé par N en amplitude et l'axe F est dilaté par un facteur N. On obtient alors $Y(F) = \frac{2.5}{N}\text{Rect}(\frac{2.5F}{N}) = 1.25\text{Rect}(1.25F)$ et le signal $Y(F)$ est répété à $F = -1$ et $F = 1$.

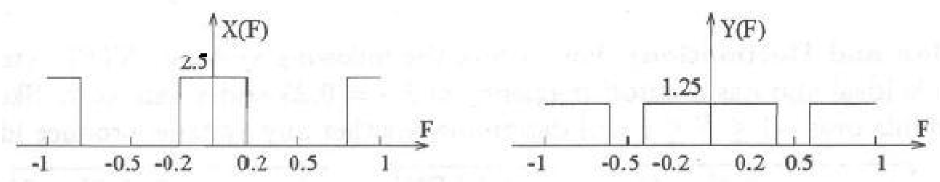

Figure 2 – $X(F)$ et $Y(F)$) de la sous-question a).

7.39 b)

Lorsqu'on sous-échantillonne en temps, on dilate le spectre en fréquence et on divise son amplitude par le facteur N. Ainsi, pour $N = 2$, $X(F)$ devient $\frac{1}{N}\text{tri}(\frac{4F}{N}) = 0.5\text{tri}(2F)$ qui se répète aux $F = -1$ et $F = 1$.

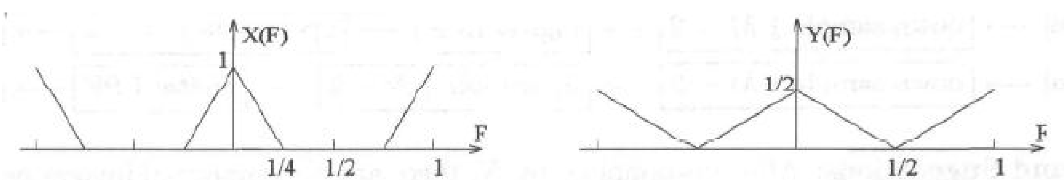

Figure 3 – $X(F)$ et $Y(F)$ de la sous-question b).

7.39 c)

Lorsqu'on sous-échantillonne en temps, on dilate le spectre en fréquence et on divise son amplitude par le facteur N. Ainsi, normalement, pour $N = 2$, $X(F)$ serait devenu $\frac{1}{N}\text{tri}(\frac{3F}{N}) = 0.5\text{tri}(1.5F)$ qui se répète aux $F = -1$ et $F = 1$. Par contre, on remarque dans la figure 4 la présence de repliement spectral, donc il ne reste qu'à additionner dans le graphique la contribution des triangle centrés à $F = -1$, $F = 0$ et $F = 1$.

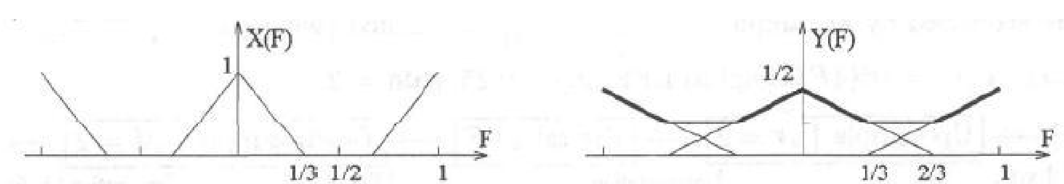

Figure 4 – $X(F)$ et $Y(F)$ de la sous-question c).

3 Exercice 7.40

Question

On présente un traitement de signal sur $x[n]$ où le facteur de sur-échantillonnage $N = 2$, où le filtre passe-bas est idéal et où le sous-échantillonnage est de facteur $M = 3$. On demande de tracer le spectre de $X(F)$ et de $Y(F)$ pour
a) Pour $X(F) = \text{tri}(4F)$ et $F_c = 0.125$
b) Pour $X(F) = \text{tri}(2F)$ et $F_c = 0.25$

Figure 5 – Système de la question 7.40.

Réponse

7.40 a)

L'interpolation crée une contraction en fréquence du spectre de $X(F)$ comme il est montré à la figure 6 et dans les autres numéros du corrigé. Le filtre passe-bas idéal coupe toutes les fréquences entre F_c et $F = 0.5$. Finalement, le sous-échantillonnage rend le signal $Y(F)$ égal à $\frac{1}{M}\text{tri}(\frac{4NF}{M}) = \frac{1}{3}\text{tri}(\frac{8F}{3})$.

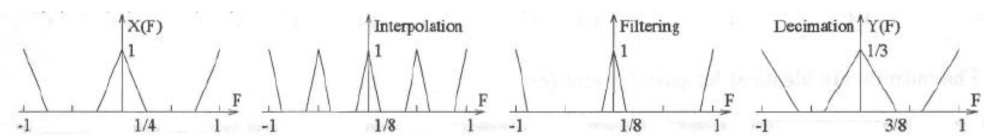

Figure 6 – Spectres de la sous-question a).

7.40 b)

L'interpolation crée une contraction en fréquence du spectre de $X(F)$ comme il est montré à la figure 7. Le filtre passe-bas idéal coupe toutes les fréquences entre F_c et $F = 0.5$. Finalement, sans repliement spectral, le sous-échantillonnage rendrait le signal $Y(F)$ égal à $\frac{1}{M}\text{tri}(\frac{2NF}{M}) = \frac{1}{3}\text{tri}(\frac{4F}{3})$. Par contre, la figure 7 nous montre du repliement, donc il ne reste qu'à additionner dans le graphique la contribution des triangle centrés à $F = -1$, $F = 0$ et $F = 1$.

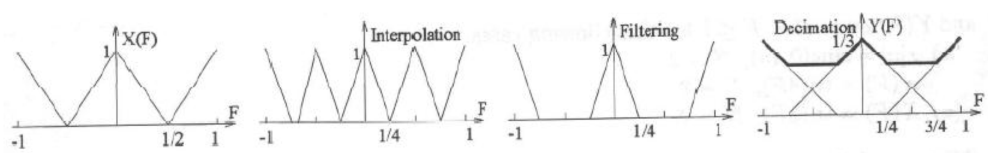

Figure 7 – Spectres de la sous-question b).

4 Exercice 7.42

Question

Tracer la sortie $Y(F)$ pour une entrée $X(F) = \text{tri}(4F)$ et un filtre passe-bas avec une fréquence de coupure $F_c = 0.25$ et un gain de 2.

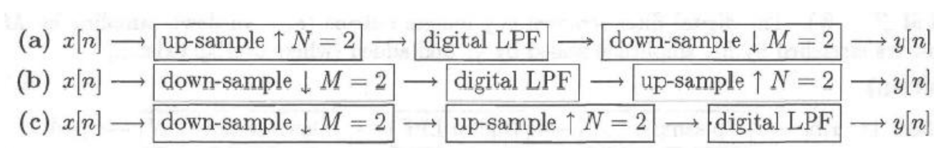

FIGURE 8 – Systèmes de la question 7.42.

Réponse

7.42 a)

L'entrée est sur-échantillonnée par un facteur $N = 2$, ce qui entraîne une contraction de l'axe F par le facteur N. Ensuite, le filtre passe-bas multiplie en amplitude le signal par N et coupe toutes les fréquences entre $F = F_c$ et $F = 0.5$, ce qui ne laisse que le triangle central et ceux à $F = -1$ et $F = 1$. Le sous-échantillonnage par un facteur $M = 2$ divise l'amplitude du spectre par M et dilate l'axe des fréquences par le facteur M. On retrouve alors le signal original.

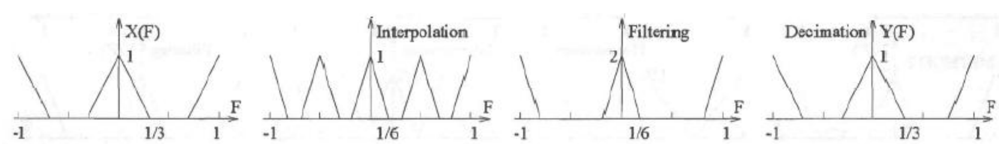

FIGURE 9 – Spectres de la sous-question a.

7.42 b)

L'entrée est sous-échantillonnée par un facteur $M = 2$, ce qui entraîne une dilatation de l'axe F par le facteur M et la division par M de l'amplitude du spectre. On voit alors la présence de repliement spectral. Ensuite, le filtre passe-bas multiplie en amplitude le signal par N et coupe toutes les fréquences entre $F = F_c$ et $F = 0.5$, ce qui ne laisse que le triangle central déformé et ceux à $F = -1$ et $F = 1$, de même forme. Le sur-échantillonnage par un facteur $N = 2$ contracte l'axe des fréquences par le facteur N et crée des images identiques à $F = -0.5$ et $F = 0.5$.

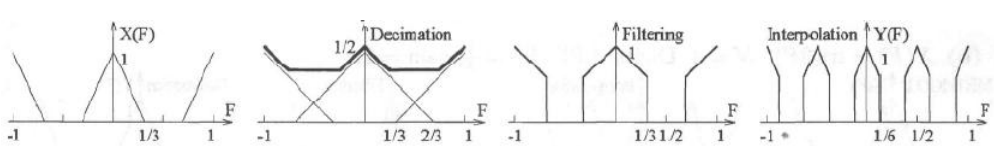

FIGURE 10 – Spectres de la sous-question b.

7.42 c)

L'entrée est sous-échantillonnée par un facteur $M = 2$, ce qui entraîne une dilatation de l'axe F par le facteur M et la division par M de l'amplitude du spectre. On voit alors la présence de repliement spectral. Le sur-échantillonnage par un facteur $N = 2$ contracte l'axe des fréquences par le facteur N et crée des images identiques à $F = -0.5$ et $F = 0.5$. Ensuite, le filtre passe-bas multiplie en amplitude le signal par N et coupe toutes les fréquences entre $F = F_c$ et $F = 0.5$, ce qui ne laisse que le triangle central déformé et ceux à $F = -1$ et $F = 1$, de même forme.

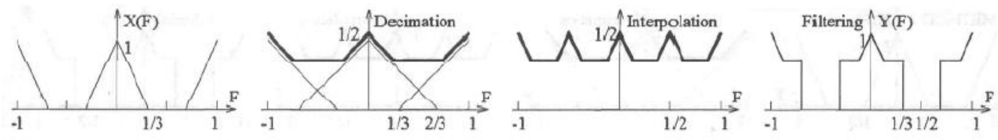

Figure 11 – Spectres de la sous-question c.