

## Modulation par impulsions codées

### 5.1 Théorème d'échantillonnage de Nyquist

Soit  $x(t)$  un signal temporel et limité en fréquence (figure 5.1). Son spectre de fréquence,  $X(f) = \mathcal{F}[x(t)]$  est décrit par :  $X(f) \neq 0$  pour  $|f| \leq W$ .

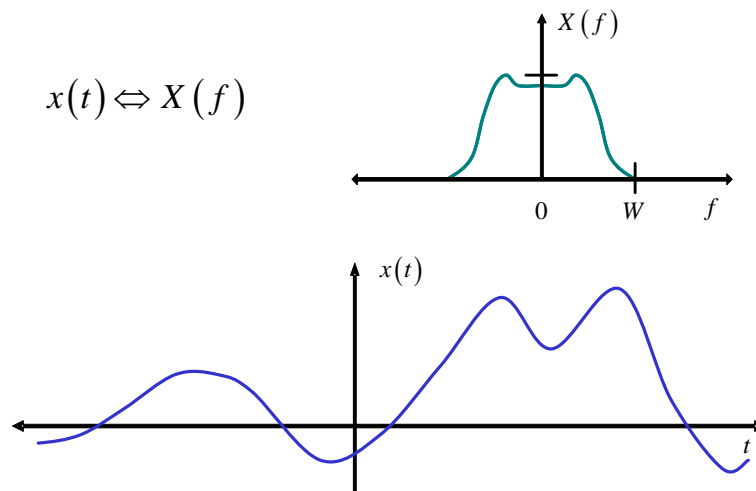


FIGURE 5.1: Signal temporel  $x(t)$  et son spectre  $X(f)$ .

On désire échantillonner le signal  $x(t)$  à toutes les  $T$  secondes. On peut réaliser cet échantillonnage en multipliant le signal  $x(t)$  avec un train d'impulsions infini que nous dénoterons  $\delta_T(t)$  (figure 5.2) :

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (5.1)$$

La version échantillonnée du signal, c'est-à-dire  $x_s(t)$  (figure 5.3), peut donc s'exprimer comme étant le produit de  $x(t)$  avec le train d'impulsions  $\delta_T(t)$  :

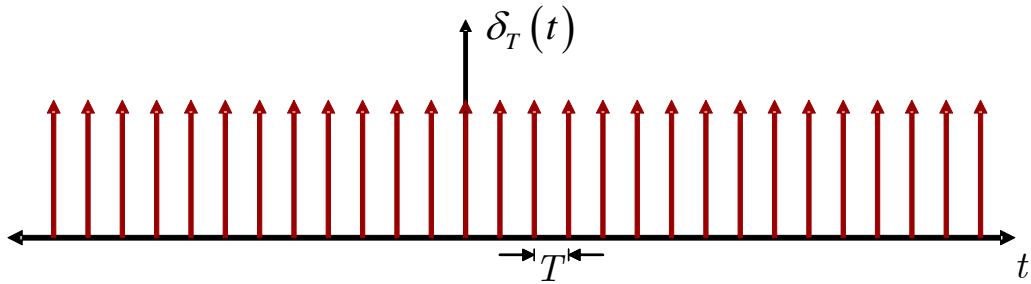
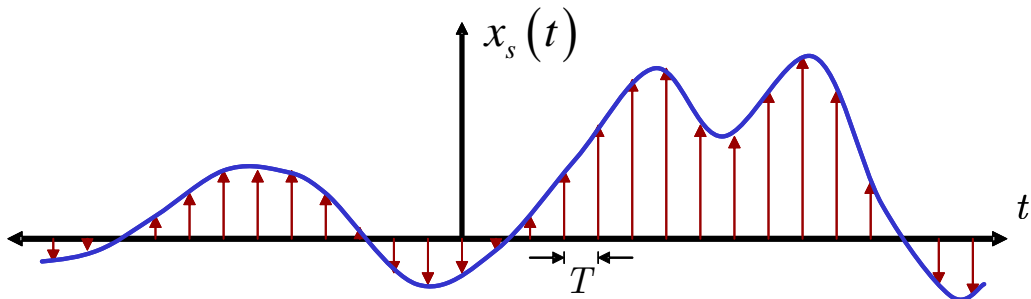


FIGURE 5.2: Fonction d'échantillonnage : peigne de Dirac.

$$x_s(t) = x(t)\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT) \quad (5.2)$$

FIGURE 5.3: Signal échantillonné  $x_s(t)$  à l'aide du peigne de Dirac.

Dans la dernière expression, la fonction  $x(t)$  ne contribue à la somme des impulsions de Dirac qu'aux instants discrets  $t = nT$  :

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) \quad (5.3)$$

La fonction  $x_s(t)$  représente la forme du signal échantillonné dans le domaine du temps. L'effet de l'échantillonnage de  $x(t)$  dans le domaine fréquentiel peut être déterminé en prenant la transformée de Fourier du signal échantillonné  $x_s(t)$  :

$$X_s(f) = \mathcal{F}[x_s(t)] = \mathcal{F}[x(t)\delta_T(t)] \quad (5.4)$$

Sachant que le produit de deux fonctions dans le temps se traduit par une convolution de leurs spectres respectifs, le spectre  $X_s(f)$  du signal échantillonné devient :

$$X_s(f) = \mathcal{F}[x(t)\delta_T(t)] = \mathcal{F}[x(t)] * \mathcal{F}[\delta_T(t)] = X(f) * \Delta_T(f) \quad (5.5)$$

où  $\Delta_T(f) = \mathcal{F}[\delta_T(t)]$ . On connaît le spectre  $X(f)$  du signal original mais quelle est la forme du spectre  $\Delta_T(f)$  ?

$$\Delta_T(f) = \mathcal{F}[\delta_T(t)] = \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)\right] \quad (5.6)$$

La fonction  $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$  n'est en fait qu'une fonction périodique de période  $T$ . Son spectre,  $\Delta_T(f)$ , est donc discret et la valeur de ses coefficients de son développement en série de Fourier exponentielle complexe est déterminée de la manière usuelle.

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \delta(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \quad (5.7)$$

pour  $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ . En choisissant  $t_0$  de façon à inclure  $t = 0$  dans l'intervalle  $[t_0, t_0 + T]$ . Par exemple, en choisissant  $t_0 = -\frac{T}{2}$  :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-j2\pi n f_s t} dt \quad (5.8)$$

où  $f_s = \frac{1}{T}$  est la fréquence fondamentale. En utilisant le propriété d'*extraction* de la fonction  $\delta(t)$  ("*sifting property*") on obtient :

$$c_n = \frac{1}{T} e^{-j2\pi n f_s t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{T} e^0 = \frac{1}{T} \quad (5.9)$$

pour toutes les valeurs de  $n$ .

Donc le spectre  $\Delta_T(f)$  peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \Delta_T(f) &= \mathcal{F}[\delta_T(t)] & (5.10) \\ \Delta_T(f) &= \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_s t}\right] \\ \Delta_T(f) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathcal{F}\left[e^{j2\pi n f_s t}\right] \\ \Delta_T(f) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \delta(f - n f_s) \end{aligned}$$

car  $e^{j2\pi n f_s t} \Leftrightarrow \delta(f - n f_s)$  et donc :

$$\Delta_T(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n f_s) \quad (5.11)$$

Le spectre  $\Delta_T(f)$  est ainsi constitué d'une suite infinie d'impulsions de Dirac d'aire  $\frac{1}{T}$  espacées en fréquence de  $f_s$  Hz (figure 5.4).

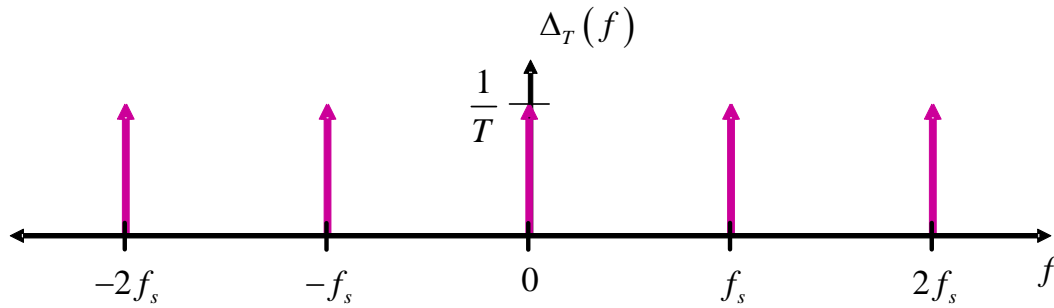


FIGURE 5.4: Spectre  $\Delta_T(f)$  du peigne de Dirac : suite infinie d'impulsions d'aire  $\frac{1}{T}$  espacées  $f_s$  Hz.

Le spectre du signal échantillonné  $X_s(f)$  est donc la convolution du spectre du signal original  $X(f)$  avec la suite infinie d'impulsions de Dirac de fréquence  $\Delta_T(f)$  espacées de  $f_s = \frac{1}{T}$  :

$$\begin{aligned} X_s(f) &= X(f) * \Delta_T(f) & (5.12) \\ X_s(f) &= \frac{1}{T} X(f) * \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n f_s) \right] \\ X_s(f) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - n f_s) \end{aligned}$$

Le spectre du signal échantillonné,  $X_s(f)$  (voir figure 5.5), résulte donc de la superposition des spectres :  $X(f)$ ,  $X(f \pm f_s)$ ,  $X(f \pm 2f_s)$ ,  $\dots$ , et ainsi de suite.

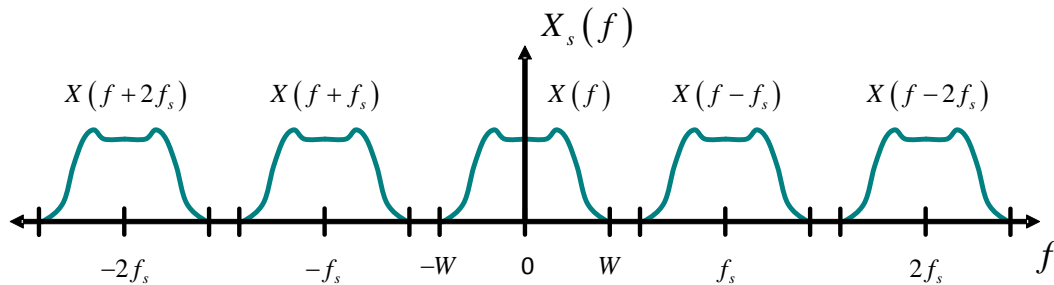


FIGURE 5.5: Spectre du signal échantillonné,  $X_s(f)$ .

Afin de s'assurer de pouvoir reproduire le signal original  $X(f)$  (ou  $x(t)$ ) à partir de sa version échantillonnée  $X_s(f)$  (ou  $x_s(t)$ ), il faut que les spectres  $X(f)$ ,  $X(f \pm f_s)$ ,  $X(f \pm 2f_s)$ ,  $\dots$ , ne se superposent pas dans le spectre du signal échantillonné  $X_s(f)$ . En d'autres mots, la fréquence d'échantillonnage,  $f_s = \frac{1}{T}$ , doit être suffisamment grande pour que :

$$f_s - W \geq W \quad (\text{largeur de bande en Hz de } x(t)) \quad (5.13)$$

c'est-à-dire que :

$$f_s \geq 2W \quad (5.14)$$

Ici, la fréquence  $f_s$  représente la fréquence d'échantillonnage et  $T = \frac{1}{f_s}$  l'intervalle de temps entre les échantillons temporels.

**Théorème d'échantillonnage :**

Soit  $x(t)$  de largeur de bande  $W$ . Ce signal  $x(t)$  peut être parfaitement reconstitué à partir de ses échantillons, pris à des intervalles de temps uniformes  $\{nT\}$ , où  $n$  est un entier, si le taux d'échantillonnage, ou fréquence d'échantillonnage,  $f_s = \frac{1}{T}$ , est au moins le double de la largeur de bande  $W$  du signal  $x(t)$ .

En pratique, on choisit une fréquence d'échantillonnage  $f_s$  plus élevée que la limite théorique du double de la largeur de bande,  $2W$ , afin de tenir compte des caractéristiques non-idéales des filtres et du fait qu'en général, les signaux ne sont pas strictement limités en fréquence (i.e.  $W$ ). On réfère alors au *suréchantillonnage* d'un signal.

Il existe aussi une *version fréquentielle du théorème d'échantillonnage* :

**Théorème d'échantillonnage (version fréquentielle) :**

Soit  $x(t)$  un signal limité dans le temps, c'est-à-dire nul pour les valeurs de temps  $t < t_1$  et  $t > t_2$ . Ce signal  $x(t)$  peut être reconstitué parfaitement si les échantillons de son spectre,  $X(f)$ , sont espacés par des intervalles de fréquence inférieurs à  $\frac{1}{2T}$  Hz.

## 5.2 Modulation d'impulsions en amplitude (MIA)

La modulation par impulsion d'amplitude (MIA) (PAM : "Pulse Amplitude Modulation") est un type de modulation qui produit un *train d'impulsions* modulées en amplitude en faisant varier, à l'intérieur d'une plage continue de valeurs, l'amplitude des impulsions en fonction de la valeur instantanée d'un signal modulant  $m(t)$ .



FIGURE 5.6: Modulation par impulsion d'amplitude (MIA).

La modulation MIA suppose un échantillonnage du message original  $m(t)$  à tous les  $T$  secondes.  $T$  est donc la période d'échantillonnage et  $f_s = \frac{1}{T}$  la fréquence, ou taux, d'échantillonnage. La modulation MIA a aussi pour effet de *bloquer* ou maintenir l'amplitude constante pendant une durée de  $\tau$  secondes où  $\tau \leq T$ .

On peut se représenter les fonctions d'échantillonnage et de blocage séparément. Le signal échantillonné  $m_\delta(t)$  s'exprime comme :

$$m_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT)\delta(t - nT) \quad (5.15)$$

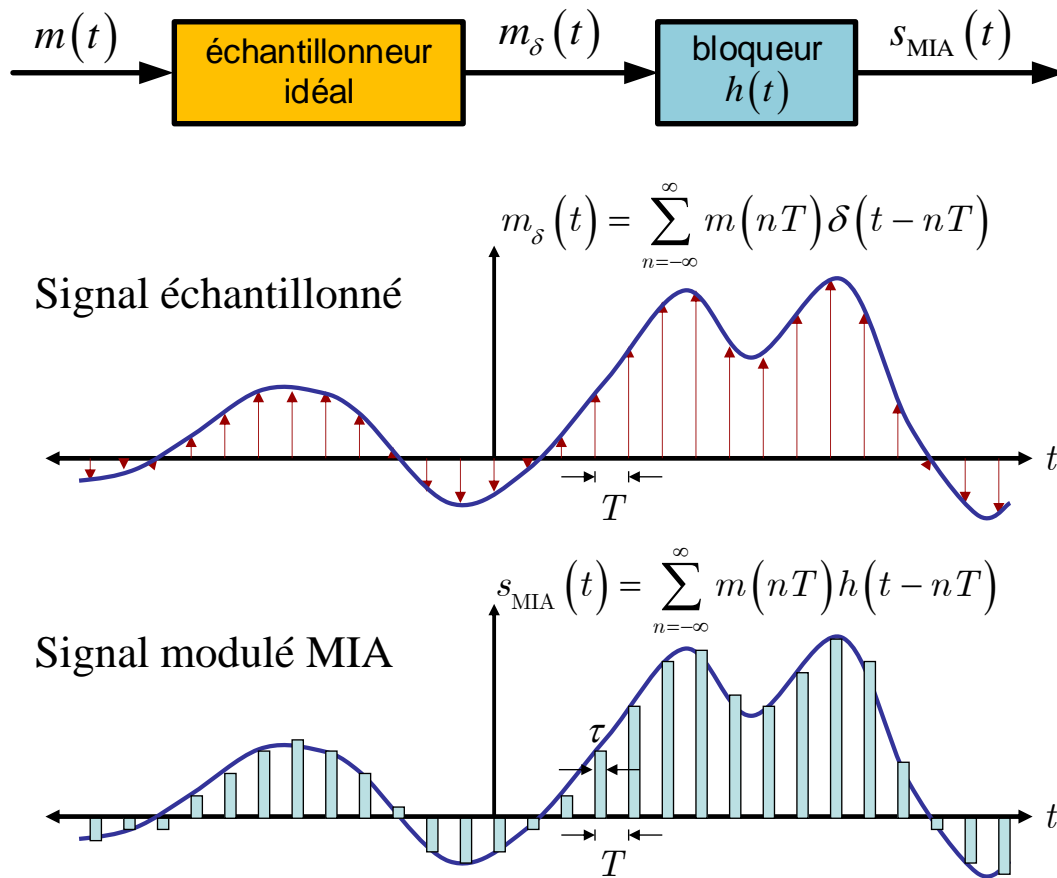


FIGURE 5.7: Modulation par impulsion d'amplitude : échantillonnage et blocage.

Dans le domaine fréquentiel, le signal échantillonné  $m_\delta(t)$  est de la forme :

$$\begin{aligned} M_\delta(f) &= \mathcal{F}[m_\delta(t)] \\ M_\delta(f) &= \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT)\delta(t - nT)\right] \\ M_\delta(f) &= f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} M(f - kf_s) \end{aligned} \quad (5.16)$$

On sait qu'il est possible de récupérer le signal original (le message)  $m(t)$  si on échantillonne celui-ci à un taux d'au moins  $2W$  échantillons par seconde (i.e., le taux de Nyquist), où  $W$  est la largeur de bande en bande de base de  $m(t)$ .

Quant au blocage de l'échantillon pendant une durée  $\tau$ , celui-ci peut-être vu comme la convolution du signal échantillonné avec une suite d'impulsions de Dirac idéales, c'est-à-dire  $m_\delta(t)$ , avec une fonction rectangulaire temporelle  $h(t)$  :

$$h(t) = \begin{cases} 1, & \text{pour } 0 < t < \tau, \\ \frac{1}{2}, & \text{pour } t = 0 \text{ et } t = \tau, \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (5.17)$$

Le signal modulé en impulsions d'amplitudes,  $s_{\text{MIA}}(t)$ , est donc de la forme :

$$\begin{aligned} s_{\text{MIA}}(t) &= m_\delta(t) * h(t) \\ s_{\text{MIA}}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} m_\delta(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda \\ s_{\text{MIA}}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT) \delta(\lambda - nT) h(t - \lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (5.18)$$

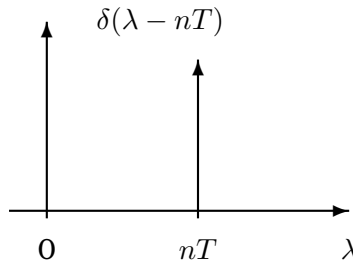
En interchangeant l'ordre de l'intégrale et de la sommation, on obtient :

$$s_{\text{MIA}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\lambda - nT) h(t - \lambda) d\lambda \quad (5.19)$$

En utilisant le propriété d'extraction ("*sifting property*") de la fonction de Dirac,  $s_{\text{MIA}}(t)$  devient :

$$s_{\text{MIA}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT) h(t - nT) \quad (5.20)$$

car  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\lambda - nT) h(t - \lambda) d\lambda = h(t - nT)$ .



Le spectre du signal MIA,  $S_{\text{MIA}}(f)$ , obtenu par la transformée de Fourier de  $s_{\text{MIA}}(t)$  est :

$$S_{\text{MIA}}(f) = \mathcal{F}[s_{\text{MIA}}(t)] = \mathcal{F}[m_\delta(t) * h(t)] = M_\delta(f)H(f) \quad (5.21)$$

où  $M_\delta(f) = f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} M(f - kf_s)$  et  $H(f) = \mathcal{F}[h(t)]$ .

On sait que si  $h(t)$  est une fonction temporelle rectangulaire de durée  $\tau$ , alors  $H(f)$  sera un *sinus cardinal*, i.e. de la forme  $\lambda \text{sinc}(f\lambda)$ . De plus, la fonction rectangulaire étant centrée à  $\frac{\tau}{2}$  plutôt qu'à 0, il s'ensuit que la fonction  $\tau \text{sinc}(f\tau)$  est multipliée par un facteur  $e^{-j\pi f\tau}$  :

$$H(f) = \tau \text{sinc}(f\tau) e^{-j\pi f\tau} \quad (5.22)$$

Le signal  $s_{\text{MIA}}(t)$  est donc *déformé* par une fonction en  $\tau \text{sinc}(f\tau)$  qui dépend de la durée de blocage (figure 5.8). Le délai  $\frac{\tau}{2}$ , lui, introduit un déphasage (i.e. le terme  $e^{-j\pi f\tau}$ ) mais ne change pas l'amplitude :

$$S_{\text{MIA}}(f) = M_{\delta}(f)H(f) = M_{\delta}(f)\tau \text{sinc}(f\tau) e^{-j\pi f\tau} \quad (5.23)$$

$$S_{\text{MIA}}(f) = f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} M(f - kf_s)\tau \text{sinc}(f\tau) e^{-j\pi f\tau} \quad (5.24)$$

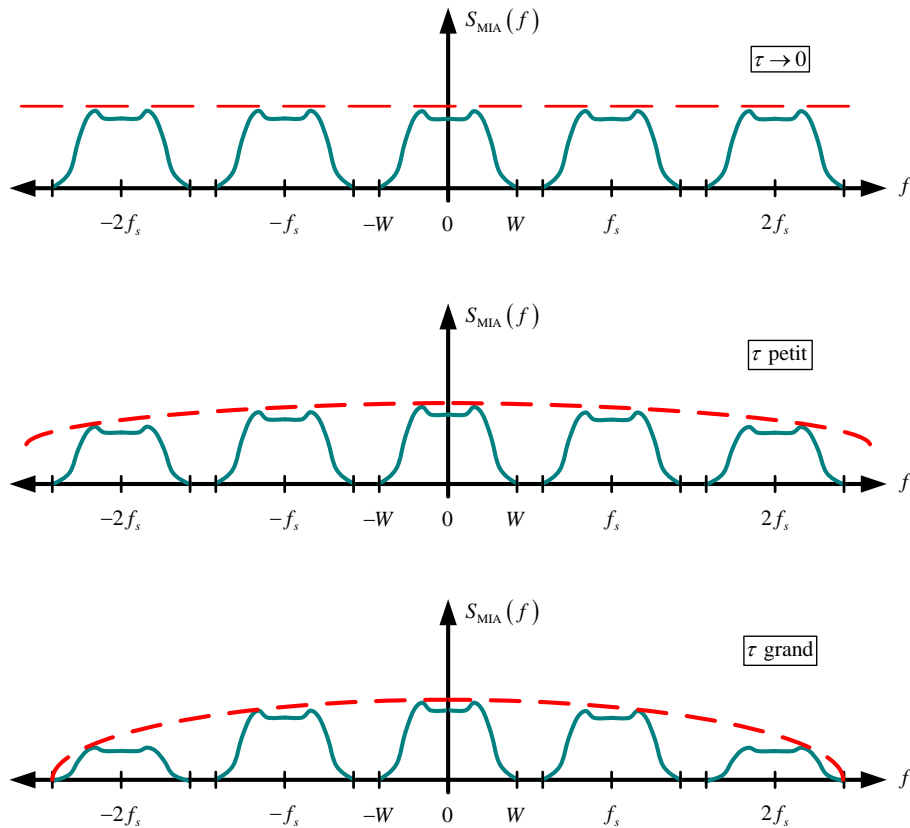


FIGURE 5.8: Spectre du signal  $S_{\text{MIA}}(f)$  : la déformation  $\tau \text{sinc}(f\tau)$  et le déphasage  $e^{-j\pi f\tau}$  dépendent de la durée  $\tau$  du blocage.



Il est possible à la réception de corriger la déformation, ou distortion, causée par le blocage pendant une durée  $\tau$  des échantillonneurs pratiques.

Après avoir filtré le signal modulé en impulsions d'amplitudes MIA,  $s_{\text{MIA}}(t)$ , afin de ne conserver que le signal d'intérêt, c'est-à-dire pour  $-W \leq f \leq W$ , on applique ce dernier à l'entrée d'un *égalisateur* qui a pour effet de compenser cette distortion :

$$H_{\text{égalisateur}}(f) = \frac{1}{H(f)} = \frac{1}{f_s \tau \text{sinc}(f\tau)} \frac{1}{e^{-j\pi f\tau}} = T_s \frac{e^{j\pi f\tau}}{\tau \text{sinc}(f\tau)} \quad (5.25)$$

pour l'égalisation en phase et en amplitude, ou encore :

$$H_{\text{égalisateur}}(f) = \frac{1}{|H(f)|} = T_s \frac{1}{\tau \text{sinc}(f\tau)} \quad (5.26)$$

pour l'égalisation en amplitude seulement.

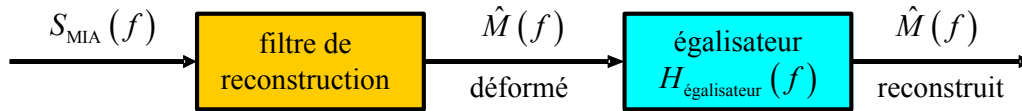


FIGURE 5.9: Égalisation d'un signal MIA.

La nécessité d'employer un égalisateur dépend du rapport de la durée du blocage  $\tau$  sur la période  $T$  des échantillons MIA, à savoir  $\frac{\tau}{T}$ . Par exemple, pour un rapport  $\frac{\tau}{T} = 10\%$ , la distortion d'amplitude n'est que de 0.5 %, et l'égalisateur n'est plus nécessaire.

### 5.3 Multiplexage à répartition dans le temps (MRT)

La technique de multiplexage à répartition dans le temps (MRT) (TDM : “*Time Division Multiplexing*”) permet le partage d'une même ressource de transmission. On peut *multiplexer* plusieurs signaux échantillonnés :  $m_1(t)$ ,  $m_2(t)$ , ...,  $m_N(t)$ , en *insérant* leurs échantillons sur une *trame temporelle* commune.

Les fréquences d'échantillonnage des  $N$  messages doivent obéir au théorème d'échantillonnage de Nyquist, à savoir :

$$f_{s_1} \geq 2W_1, \quad \dots, \quad f_{s_n} \geq 2W_n, \quad \dots, \quad f_{s_N} \geq 2W_N,$$

où  $W_n$  (avec  $1 \leq n \leq N$ ) est la largeur de bande du signal  $m_n(t)$ .

---

#### Exemple 5.1 : Le multiplexage à répartition dans le temps

---

Supposons que l'on veuille multiplexer  $N$  messages de largeur de bande  $W$  modulés en impulsions d'amplitude MIA (PAM).

Si  $W = 100$  kHz, alors on doit échantillonner chacun des  $N$  messages avec un taux d'échantillonnage  $f_s \geq 2W$ , c'est-à-dire avec au moins 200 000 échantillons

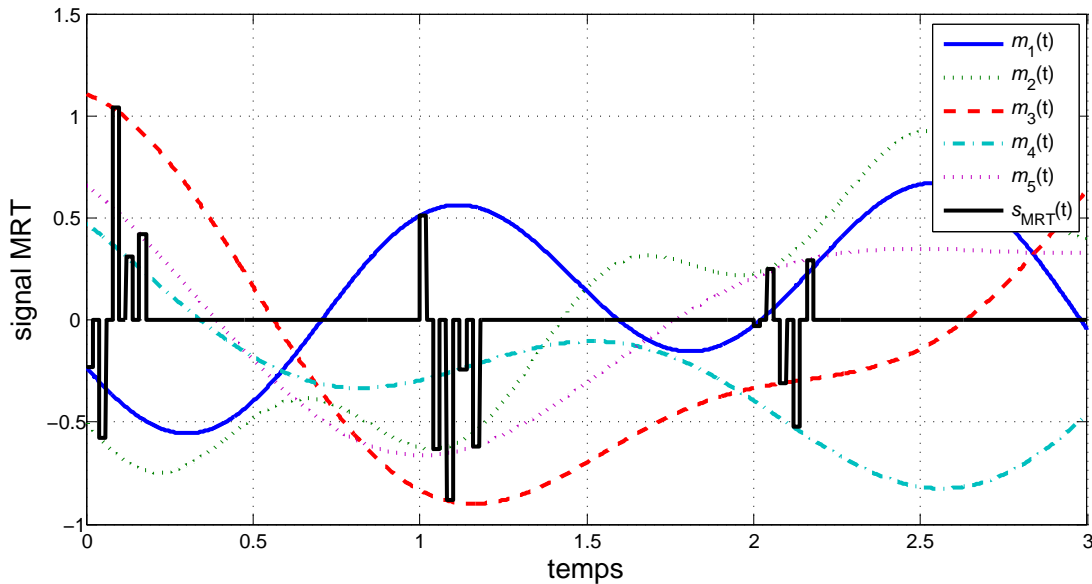


FIGURE 5.10: Exemple de signaux superposés avec le multiplexage à répartition dans le temps (MRT).

par seconde. La période d'échantillonnage  $T$ , pour un signal donné, ne doit pas dépasser  $T = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{200\,000} = 5 \mu\text{s}$ .

Si, par exemple, on a  $N = 25$  messages,  $m_1(t), m_2(t), \dots, m_{25}(t)$ , on doit pouvoir placer sur la trame temporelle un échantillon de chacun des 25 messages à tous les  $T = 5 \mu\text{s}$ , c'est-à-dire 25 échantillons.

Le temps réservé à un signal particulier sur la trame temporelle n'est donc que de :

$$T_{MRT} = \frac{T}{N} \leq \frac{5}{25}$$

$$T_{MRT} \leq 200 \text{ ns}$$

Maintenant, la durée  $T$  de blocage des signaux MIA ne peut dépasser  $T_{MRT}$ .

$$T \leq T_{MRT} \leq 200 \text{ ns}$$

La largeur de bande allouée au signal multiplexé en temps,  $m_{MRT}(t)$ , est donc d'au moins  $\frac{1}{200 \text{ ns}}$ , soit 5 MHz.

## 5.4 Modulation par impulsion codée (MIC)

### 5.4.1 Principe de la modulation MIC

La modulation par impulsion codée (MIC) (ou PCM : "Pulse Code Modulation") est une technique de modulation qui consiste à :

1. échantillonner un signal  $m(t)$  continu en temps et en amplitude à des instants discrets :  $m_n = m(nT)$ ,
2. *quantifier* les échantillons (toujours d'amplitude continue) en un nombre fini de niveaux, ou d'amplitudes discrètes,  $q_n = q(nT)$ , et
3. assigner un mot-code binaire,  $\mathbf{c}_n = \mathbf{c}(nT)$ , à chacun de ces échantillons quantifiés.

Parmi les avantages qu'apporte la modulation par impulsions codées, on peut citer le faible coût des circuits employés, la possibilité de multiplexer plusieurs types de signaux (tels que du texte, des fichiers informatiques, des signaux vidéo et audio, etc.) en multiplexage temporel MRT (ou TDM). La modulation par impulsions codées permet aussi la régénération de la forme d'onde, ici un train binaire, à chaque station répéitrice.

Cependant, un désavantage de la représentation des signaux en modulation MIC est une largeur de bande requise plus grande.

La figure 5.11 montre les composantes d'un système MIC, à savoir : le transmetteur, le canal et les relais (répéitricés) et le récepteur.

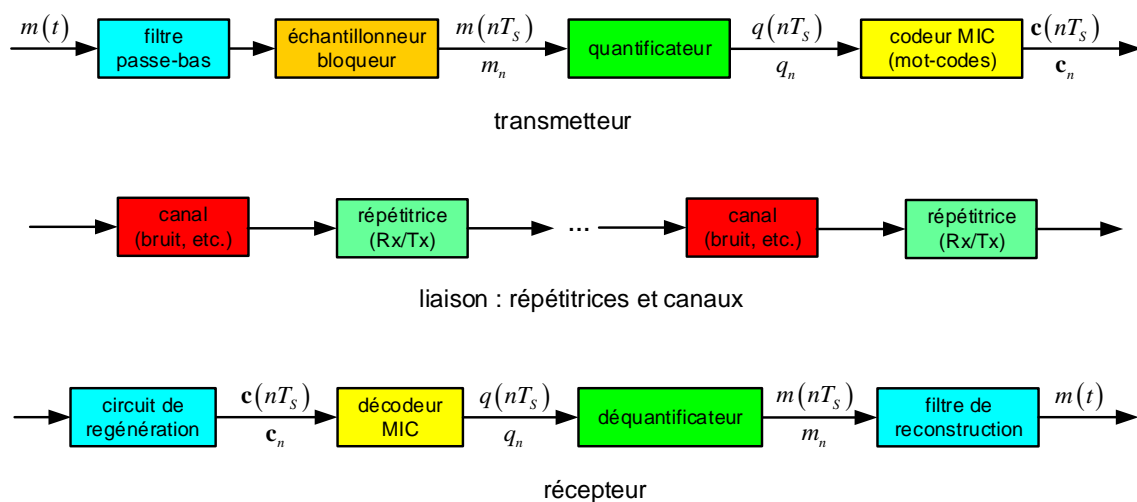
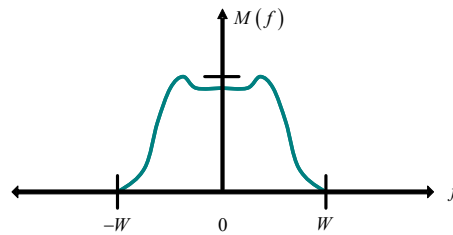


FIGURE 5.11: Composantes d'un modulateur par impulsions codées (MIC) : transmetteur, canal de transmission répéitricés, et le récepteur.

Au transmetteur, le signal original  $m(t)$ , s'il n'est pas limité en fréquence, est filtré par un filtre passe-bas de largeur de bande  $W$ . À la sortie de ce filtre on a ainsi un signal  $m(t)$  dont le spectre  $M(f)$  est limité en fréquence (figure 5.12) :

Le signal  $m(t)$  est alors échantillonné à tous les  $T$  secondes pour donner la séquence d'amplitudes  $\{m(nT)\}$ . Il s'agit jusqu'ici de la modulation par impulsions d'amplitudes MIA (PAM).

Les échantillons  $\{m(nT)\}$  sont alors quantifiés sur un nombre fini de niveaux  $L$  (figure 5.13). La quantification d'amplitude consiste à transformer un échantillon

FIGURE 5.12: Spectre du signal,  $M(f)$ , limité en fréquence.

$m_n = m(nT)$  du signal  $m(t)$ , au temps  $t = nT$ , en un nouveau signal  $q_n = q(nT)$  pris parmi un nombre fini  $L$  de niveaux :

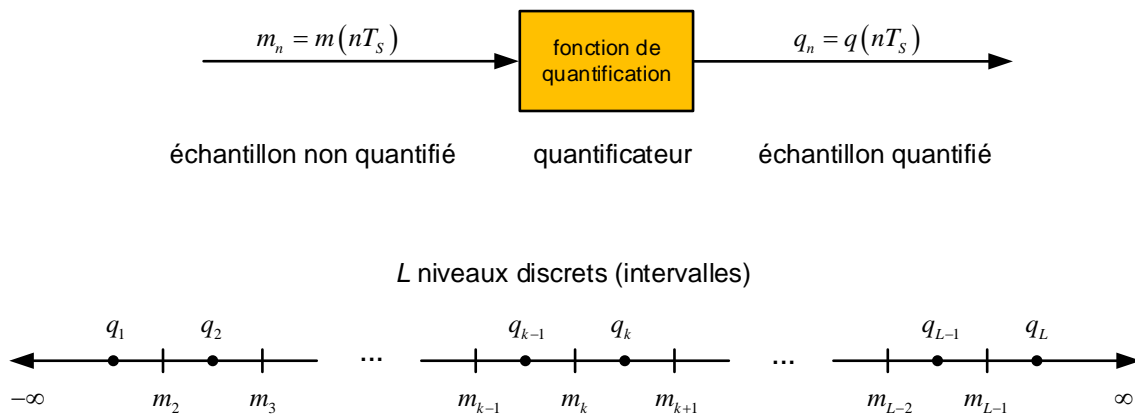


FIGURE 5.13: Quantification d'un signal en modulation MIC.

La fonction de quantification  $g[\ ]$  peut être de deux types, en général : “*midrise*” ou “*midtread*” et ce, avec  $L$  niveaux de quantification :

$$\mathcal{I}_k : \{m_k < m \leq m_{k+1}\} \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, L \quad (5.27)$$

Une fois les échantillons quantifiés sur  $L$  niveaux, on leur assigne un mot-code binaire de longueur  $\nu$  où  $\nu$  est déterminé par :

$$\nu = \lceil \log_2 L \rceil \quad (5.28)$$

où  $\lceil \ ]$  est la fonction *plafond*.

Par exemple, si on quantifie les échantillons  $\{q(nT)\}$  sur  $L = 10$  niveaux, alors il faut  $\nu = \lceil \log_2 10 \rceil = \nu = \lceil 3.3219 \rceil = 4$  bits afin de pouvoir assigner 10 mot-codes binaires distincts. Les échantillons sur un disque audio-numérique (CD) sont codés sur  $\nu = 16$  bits. On peut donc représenter  $q(nT)$  avec  $L = 2^{16} = 65,536$  niveaux distincts.

### 5.4.2 Bruit de quantification

Le fait de quantifier chaque échantillon  $m(nT)$  avec  $q(nT)$  a pour effet de distordre le signal original : cette information sur la *valeur exacte* de  $m(nT)$  est perdue. Il en résulte un *bruit de quantification*. Celui-ci, dénoté  $e(nT)$ , est la différence entre la valeur de l'échantillon original  $m(nT)$  et la valeur du niveau de quantification correspondant  $q(nT)$  :

$$e(nT) = m(nT) - q(nT) \quad (5.29)$$

On peut considérer la valeur de l'échantillon non quantifié comme étant une *variable aléatoire*  $M$  (on ne sait pas *a priori* qu'elle sera sa valeur) ainsi que sa version quantifiée  $Q$ . Alors, l'erreur de quantification peut, elle-même, être représentée par une autre variable aléatoire  $E$ , qui n'est que la différence entre les variables aléatoires  $M$  et  $Q$  :

$$E = M - Q \quad (5.30)$$

---

#### Exemple 5.2 : Erreur de quantification

---

Supposons qu'un signal  $m(t)$  soit limité en amplitude dans l'intervalle  $[-m_{max}, m_{max}]$  et qu'il soit échantillonné à la fréquence  $f_s$ . On désire quantifier chacun des échantillons de la séquence  $\{m(nT)\}$  à l'aide d'un quantificateur uniforme (figure 5.14) de type "midrise". La grandeur, ou l'espacement, des niveaux de quantification  $\Delta$  est donné par :

$$\Delta = \frac{m_{max} - (-m_{max})}{L} = \frac{2m_{max}}{L}$$

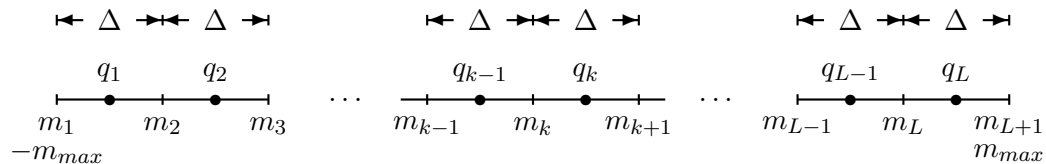


FIGURE 5.14: Quantificateur uniforme.

L'erreur de quantification est bornée ici par :

$$-\frac{\Delta}{2} \leq E \leq \frac{\Delta}{2}$$

Si on suppose que l'erreur de quantification est uniformément distribué dans l'intervalle :  $-\frac{\Delta}{2} \leq e \leq \frac{\Delta}{2}$ , alors sa *fonction de densité de probabilité*,  $f_E(e)$ , est donnée par :

$$f_E(e) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & \text{pour } -\frac{\Delta}{2} \leq e \leq \frac{\Delta}{2} \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Connaissant la fonction de densité de probabilité  $f_E(e)$  du bruit de quantification, on peut calculer la puissance du bruit de quantification  $P_{bruit}$  :

$$\begin{aligned} P_{bruit} &= \sigma_E^2 = \mathcal{E}[E^2] = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} f_E(e) e^2 de \\ P_{bruit} &= \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} e^2 de = \frac{1}{\Delta} \left. \frac{e^3}{3} \right|_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} = \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(-\frac{\Delta}{2}\right)^3}{3} \right] = \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{\Delta^3}{24} - \frac{-\Delta^3}{24} \right] \\ P_{bruit} &= \sigma_E^2 = \frac{\Delta^2}{12} \end{aligned}$$

On peut aussi représenter la puissance du bruit de quantification,  $P_{bruit}$ , en fonction du nombre de niveaux de quantification  $L$  et des *valeurs extrêmes* du signal :  $-m_{max}$  et  $m_{max}$  :

$$\begin{aligned} P_{bruit} &= \frac{\Delta^2}{12} \quad \text{où } \Delta = \frac{2m_{max}}{L} \\ P_{bruit} &= \frac{\left(\frac{2m_{max}}{L}\right)^2}{12} = \frac{\left(\frac{4m_{max}^2}{L^2}\right)}{12} \\ P_{bruit} &= \frac{1}{3} \frac{m_{max}^2}{L^2} \end{aligned}$$

Maintenant, si ce nombre  $L$  de niveaux de quantification est une puissance de 2 (i.e.  $L = 2^\nu$ ), comme c'est souvent le cas en pratique pour permettre la représentation des échantillons quantifiés avec des vecteurs binaires de longueur  $\nu$ , alors la puissance du bruit  $P_{bruit}$  est égale :

$$\begin{aligned} P_{bruit} &= \frac{1}{3} m_{max}^2 L^{-2} = \frac{1}{3} m_{max}^2 (2^\nu)^{-2} \\ P_{bruit} &= \frac{2^{-2\nu}}{3} m_{max}^2 \end{aligned}$$

Si  $P_{signal}$  est la puissance moyenne du signal, alors le *rapport signal-à-bruit de quantification*,  $SQNR$ , est donné par :

$$SQNR = \frac{P_{signal}}{P_{bruit}} = \frac{3 \times 2^{2\nu} \times P_{signal}}{m_{max}^2}$$

**Exemple 5.3 :** Disque audio numérique

Les disques audio numériques emploient la modulation PCM avec quantification uniforme sur 16 bits et une fréquence d'échantillonnage de 44.1 kHz pour numériser les signaux stéréo audio.

Soit un signal  $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$  [volts]. Quel est le rapport signal-à-bruit de quantification lorsque  $A_m = m_{\max}$  (amplitude maximale du signal à l'entrée du quantificateur)? La puissance  $P_m$  du signal (dans 1  $\Omega$  est :

$$P_m = \frac{A_m^2}{2} = \frac{m_{\max}^2}{2} \quad [\text{watts}]$$

Le quantificateur est uniforme avec  $M = 2^\nu$  niveaux et un pas  $\Delta$  de :

$$\Delta = \frac{2m_{\max}}{M} = \frac{2m_{\max}}{2^\nu} \quad [\text{volts}]$$

La puissance du bruit de quantification  $P_{\text{bruit}}$  (en supposant une distribution uniforme du bruit) est :

$$P_{\text{bruit}} = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{\left(\frac{2m_{\max}}{2^\nu}\right)^2}{12} = \frac{2^2 m_{\max}^2}{12 \times (2^\nu)^2} \quad [\text{watts}]$$

Le rapport signal-à-bruit de quantification est :

$$SQNR = \frac{P_m}{P_{\text{bruit}}} = \frac{\left(\frac{m_{\max}^2}{2}\right)}{\left(\frac{m_{\max}^2}{3 \times 2^{2\nu}}\right)} = \frac{3 \times 2^{2\nu}}{2} = 3 \times 2^{(2\nu-1)}$$

En décibels, on a :

$$SQNR_{\text{dB}} = 10 \log_{10}(SQNR) = 10 \log_{10}\left(3 \times 2^{(2\nu-1)}\right)$$

Avec  $\nu = 16$  bits ( $M = 2^{16} = 65,536$  niveaux de quantification) :

$$SQNR = 3 \times 2^{(2\nu-1)} = 3 \times 2^{31} = 6.442 \times 10^9$$

$$SQNR_{\text{dB}} = 10 \log_{10}(6.442 \times 10^9) = 98,09\text{dB}$$

## 5.5 Quantification non-uniforme

Les signaux analogiques représentant la voix ont plus de chance d'avoir de faibles valeurs que des valeurs près du maximum permis. Le bruit de grenaille devient alors important. On peut réduire le pas de quantification pour des valeurs du signal proches de 0 : on parle alors de quantification non-uniforme.

La figure 5.15 montre le diagramme bloc d'un système de quantification non-uniforme constitué d'un circuit de compression au transmetteur et d'un circuit d'expansion au récepteur.

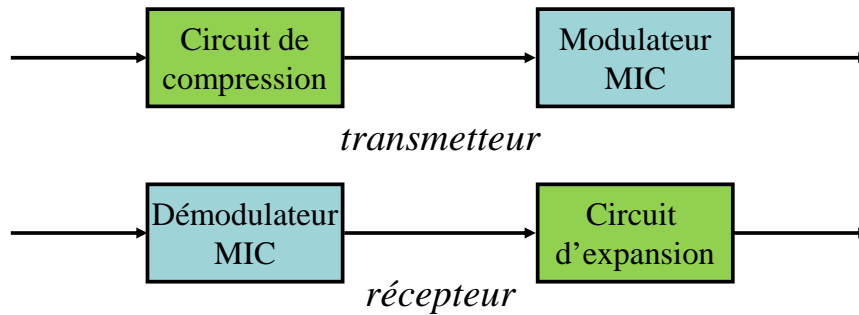


FIGURE 5.15: Quantification non-uniforme : compression au transmetteur et expansion au récepteur.

### 5.5.1 Quantification non-uniforme avec la loi- $\mu$

La compression par la loi- $\mu$  ( $\mu$ -law compression) est définie par la relation suivante :

$$y(t) = \operatorname{sgn}(x(t)) \frac{\ln(1 + \mu |x(t)|)}{\ln(1 + \mu)} \quad \text{avec } 0 \leq |x(t)| \leq 1 \quad (5.31)$$

où  $\mu$  est une constante positive. Lorsque  $\mu = 0$  ceci correspond à la quantification uniforme. Au Canada (États-Unis et Japon aussi), on utilise  $\mu = 255$ .

### 5.5.2 Quantification non-uniforme avec la loi- $A$

Quant à la compression par la loi- $A$  ( $A$ -law compression), celle-ci est définie par :

$$y(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x(t)) \frac{A |w_1(t)|}{1 + \ln A}, & 0 \leq |x(t)| \leq \frac{1}{A} \\ \operatorname{sgn}(x(t)) \frac{1 + \ln(A |x(t)|)}{1 + \ln A}, & \frac{1}{A} \leq |x(t)| \leq 1 \end{cases} \quad (5.32)$$

où  $A$  est une constante positive : une valeur typique de  $A$  est 87.6. Un exemple pratique de compresseur employant les lois  $A$  et  $\mu$  et le modulateur PCM MC14LC5540 de Motorola.



## 5.6 Interférence intersymbole

### 5.6.1 Canal de transmission dispersif et interférence intersymbole

L'interférence intersymbole (IIS) est un effet dispersif dans le temps causé par le canal de transmission, les filtres passe-bande aux transmetteur et récepteur (voir figure 5.16).

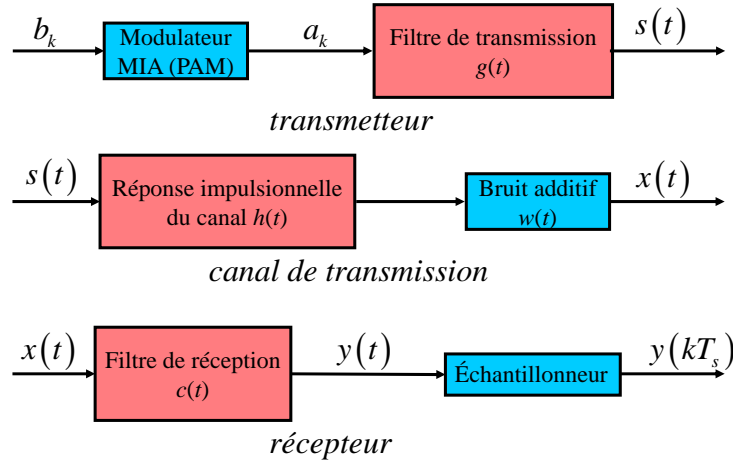


FIGURE 5.16: Interférence intersymbole (IIS) causée par la dispersion du signal dans le canal de transmission, et les filtres au transmetteur et au récepteur.

Considérons la séquence d'information binaire  $\{b_k\}_{k=1,\dots}$  et sa version en format binaire  $\{a_k\}_{k=1,\dots}$  :

$$a_k = \begin{cases} +1, & \text{si } b_k = 1 \\ -1, & \text{si } b_k = 0. \end{cases} \quad (5.33)$$

Le signal transmis à la sortie du filtre passe-bande de transmission,  $s(t)$ , est donné par :

$$s(t) = \sum_{k=1,\dots} a_k h_{TX}(t - kT_s) \quad (\text{modulation d'amplitude MIA}) \quad (5.34)$$

où  $T_s$  est la durée d'un symbole.

Le signal  $s(t)$  est transmis dans le canal de transmission qui introduit de l'*interférence intersymbole* et du *bruit additif gaussien* :

$$x(t) = s(t) * h_{canal}(t) + w(t) \quad (5.35)$$

où  $h_{canal}(t)$  est la réponse impulsionnelle du canal et  $w(t)$  représente le bruit additif gaussien. À la sortie du filtre à la réception, de réponse impulsionnelle  $h_{RX}(t)$ , on

obtient le signal  $y(t)$  :

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h_{RX}(t) = [s(t) * h_{canal}(t) * h_{RX}(t)] + [w(t) * h_{RX}(t)] \\ y(t) &= x(t) * h_{RX}(t) = [s(t) * h_{canal}(t) * h_{RX}(t)] + n(t) \end{aligned} \quad (5.36)$$

ou encore :

$$y(t) = K \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k h(t - kT_s) + n(t) \quad \text{où} \quad Kh(t) = \overbrace{h_{TX}(t) * h_{canal}(t) * h_{RX}(t)}^{\text{effet des 3 filtres}} \quad (5.37)$$

où  $K$  est une constante. En prenant la transformée de Fourier de  $Kh(t)$  :

$$\begin{aligned} KH(f) &= \mathcal{F}[Kh(t)] = \mathcal{F}[h_{TX}(t) * h_{canal}(t) * h_{RX}(t)] \\ KH(f) &= H_{TX}(f) \cdot H_{canal}(f) \cdot H_{RX}(f) \end{aligned} \quad (5.38)$$

Au temps discret  $t = iT_s$ , on reçoit le symbole  $y(iT_s)$  :

$$y(iT_s) = K \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k h[(i - k)T_s] + n(iT_s) \quad (5.39)$$

ou encore :

$$y(iT_s) = \underbrace{Ka_i h(0)}_{\text{signal désiré}} + \underbrace{K \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq i}}^{\infty} a_k h[(i - k)T_s]}_{\text{interférence intersymbole}} + \underbrace{n(iT_s)}_{\text{bruit (filtré)}} \quad (5.40)$$

Ici  $Ka_i h(0)$  est le signal désiré au temps  $t = iT_s$ ,  $K \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq i}}^{\infty} a_k h[(i - k)T_s]$  est l'interférence intersymbole et  $n(iT_s)$  est le bruit (filtré) au temps  $iT_s$ . Si on néglige l'effet du bruit, i.e.  $n(iT_s) = 0$ , alors :

$$y(iT_s) = \underbrace{Ka_i h(0)}_{\text{signal désiré}} + \underbrace{K \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq i}}^{\infty} a_k h[(i - k)T_s]}_{\text{interférence intersymbole}} \quad (5.41)$$

### 5.6.2 Critère de Nyquist pour éliminer l'interférence intersymbole

Le problème ici consiste à décoder la séquence d'information originale  $\{b_k\}_{k=1, \dots}$  à partir du signal reçu et filtré  $y(t)$ . On échantillonne ce signal  $y(t)$  aux instants discrets :  $y(0), y(T_s), y(2T_s), \dots, y(iT_s), \dots$ , où  $T_s$  est la durée des symbole transmis.

On doit pouvoir éliminer la contribution de l'interférence intersymbole,  $a_k h[(i - k)T_s]$  pour  $k \neq i$ , c'est-à-dire l'impulsion de durée finie  $h(t)$  causée par le filtre au transmetteur  $h_{TX}(t)$ , la réponse impulsionnelle du canal de transmission  $h_{canal}(t)$

et la réponse impulsionnelle du filtre passe-bande au récepteur. Autrement dit, on désire que :

$$h[(i - k)T_s] = \begin{cases} 1, & \text{si } i = k \text{ et} \\ 0, & \text{si } i \neq k. \end{cases} \quad (5.42)$$

ou encore que  $h(0) = 1$ . Si c'est le cas, en supposant qu'il n'y ait pas de bruit, on aurait :

$$\begin{aligned} y(iT_s) &= K \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k h[(i - k)T_s] \\ y(iT_s) &= K a_i, \quad \forall i \end{aligned} \quad (5.43)$$

C'est-à-dire le cas idéal où il n'y a pas d'interférence intersymbole.

Considérons la version échantillonnée  $h_\delta(t)$  du signal  $h(t)$  :

$$h_\delta(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(lT_s) \delta(t - lT_s) \quad \text{où } l = i - k. \quad (5.44)$$

On sait que dans le domaine fréquentiel, le *peigne de Dirac* temporel, espacé de multiples de  $T_s$ , se traduit par un peigne de Dirac fréquentiel avec des espacements aux multiples de  $R_s = \frac{1}{T_s}$  :

$$\begin{aligned} H_\delta(f) &= \mathcal{F}[h_\delta(t)] = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(f - nR_s) \quad \text{et aussi} \\ H_\delta(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_\delta(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ H_\delta(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(lT_s) \delta(t - lT_s) \right] e^{-j2\pi ft} dt \end{aligned} \quad (5.45)$$

Pour ne pas avoir d'interférence intersymbole, on doit avoir  $h(lT_s) = 1$  si  $l = 0$  et  $h(lT_s) = 0$  si  $l \neq 0$ . En supposant que ce soit le cas, le spectre  $H_\delta(f)$  se réduit à :

$$\begin{aligned} H_\delta(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(0) \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ H_\delta(f) &= h(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ H_\delta(f) &= h(0) e^{-j2\pi ft} \Big|_{t=0} \quad (\text{propriété d'extraction de la Dirac}) \\ H_\delta(f) &= h(0) = 1 \\ H_\delta(f) &= 1 = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(f - nR_s) \end{aligned} \quad (5.46)$$

Et donc finalement :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} H(f - nR_s) = T_s \quad (5.48)$$

Ainsi, afin d'éliminer l'interférence intersymbole causée par le canal et les filtres de transmission et de réception, on doit avoir une réponse en fréquence  $H(f)$ , dont la somme infinie décalée de multiples de  $R_s = \frac{1}{T_s}$  est constante (voir figure 5.17). C'est le critère de Nyquist pour l'élimination de l'interférence intersymbole.

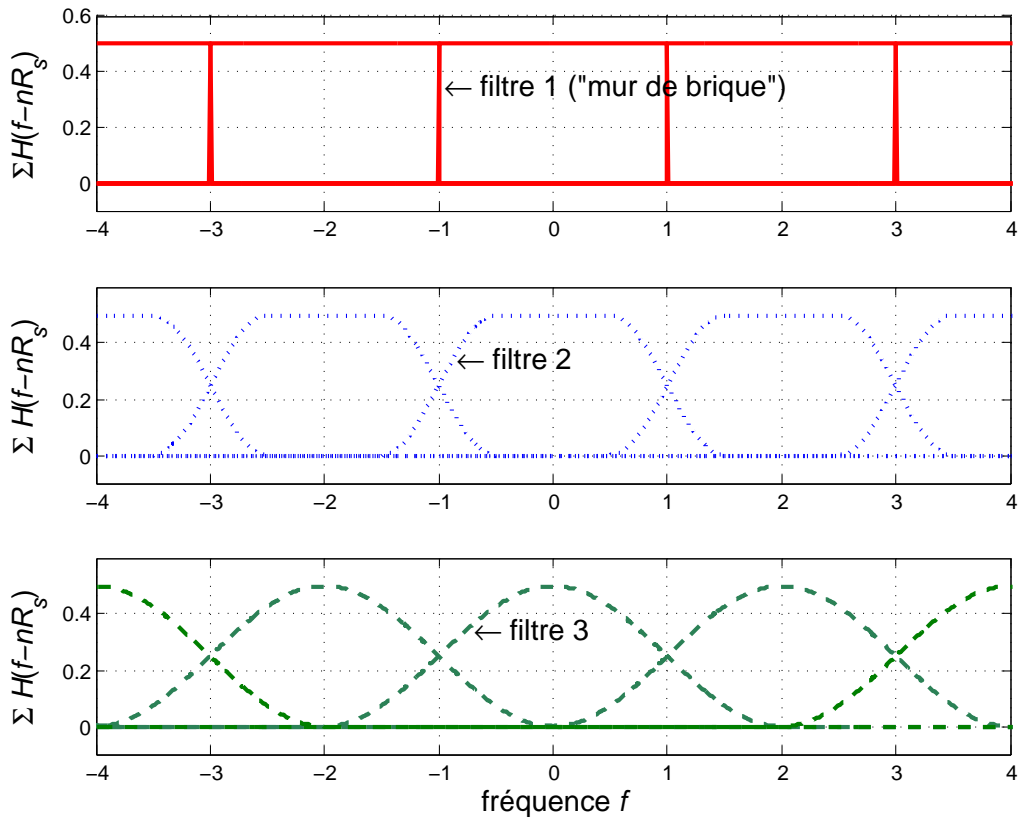


FIGURE 5.17 – Exemple de trois filtres satisfaisant le critère de Nyquist pour l'élimination de l'interférence intersymbole :  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} H(f - nR_s) = 1/T_s$ .

---

#### Exemple 5.4 : Le critère de Nyquist pour l'IIS

---

L'exemple le plus simple de filtre répondant au critère de Nyquist pour l'élimination de l'interférence intersymbole est le filtre idéal rectangulaire (*"brick wall filter"*) :

$$H(f) = \begin{cases} \frac{1}{2W}, & \text{pour } -W \leq f \leq W, \text{ et} \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$H(f) = \frac{1}{2W} \Pi\left(\frac{f}{2W}\right)$$

où  $W = \frac{1}{2T_s} = \frac{R_s}{2}$ . Sa réponse impulsionnelle  $h(t)$  est un *sinus cardinal* :

$$h(t) = \text{sinc}(2Wt) = \frac{\sin(2\pi Wt)}{2\pi Wt}$$

Il est difficile en pratique de réaliser ce filtre il doit être d'amplitude constante entre  $-W$  et  $W$  et il n'y a pas de *marge d'erreur* aux instants d'échantillonnage : i.e.  $\Delta t \Rightarrow 0$ .

### 5.6.3 Filtre à cosinus surélevé

Le filtre à cosinus surélevé ("*raised cosine filter*") est un filtre, parmi plusieurs autres, qui permet de respecter le critère de Nyquist pour éliminer l'interférence intersymbole. Sa réponse en fréquence  $H(f)$  est de la forme :

$$H(f) = \begin{cases} \frac{1}{2W}, & \text{pour } 0 \leq |f| \leq f_1, \\ \frac{1}{4W} \left\{ 1 - \sin \left[ \frac{\pi(|f| - W)}{2W - 2f_1} \right] \right\}, & \text{pour } f_1 < |f| \leq 2W - f_1, \text{ et} \\ 0, & \text{pour } |f| > 2W - f_1. \end{cases} \quad (5.49)$$

Le facteur  $\alpha = 1 - \frac{f_1}{W}$  est défini comme étant le *facteur d'adoucissement* du filtre à cosinus élevé ("*roll-off factor*"). Il varie entre 0 (ce qui correspond alors au filtre rectangulaire idéal) et 1. Sa réponse impulsionnelle  $h(t)$  est donnée par :

$$h(t) = \text{sinc}(2Wt) \left[ \frac{\cos(2\pi\alpha Wt)}{1 - 16\alpha^2 W^2 t^2} \right] \quad \text{avec } 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (5.50)$$

Pour  $\alpha = 0$  :

$$H(f) = \begin{cases} \frac{1}{2W}, & \text{pour } |f| \leq W, \text{ et} \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (5.51)$$

et

$$h(t) = \text{sinc}(2Wt) \quad (5.52)$$

comme prévu pour le filtre rectangulaire idéal. Avec  $\alpha = 1$ ,  $f_1 = 0$  et :

$$H(f) = \begin{cases} \frac{1}{4W} \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{\pi f}{2W} \right] \right\}, & \text{pour } |f| < 2W, \text{ et} \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (5.53)$$

et

$$h(t) = \left[ \frac{\text{sinc}(4Wt)}{1 - 16W^2 t^2} \right]. \quad (5.54)$$

**Exemple 5.5 :** Filtre à cosinus surélevé

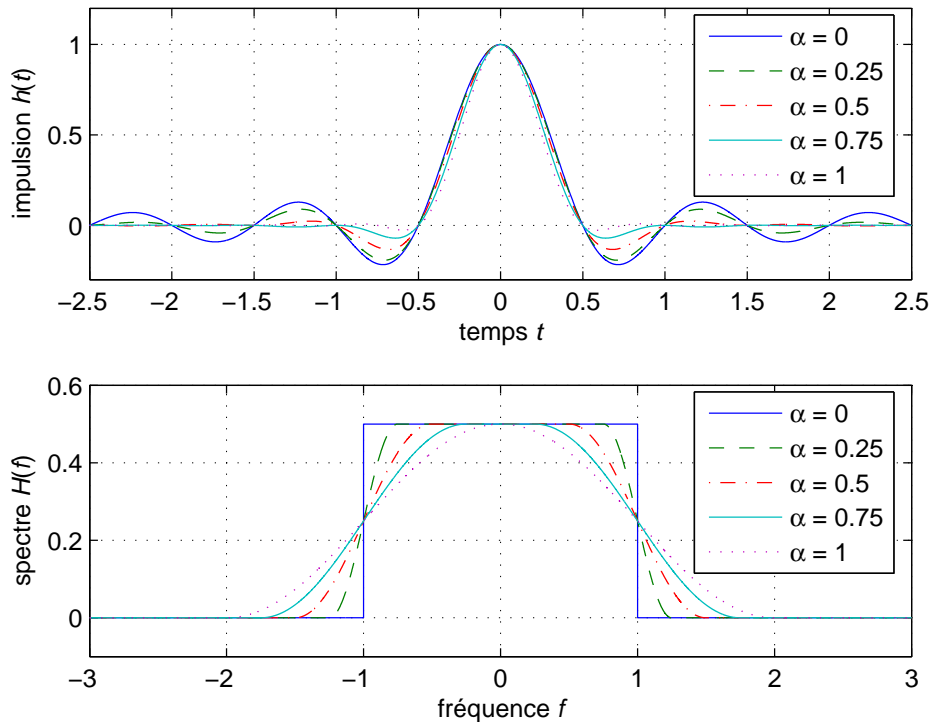


FIGURE 5.18 – Réponse impulsionnelle  $h(t)$  et fonction de transfert  $H(f)$  d'un filtre à cosinus surélevé avec des facteurs d'adoucissement  $\alpha = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$ .

Soit la séquence binaire d'information :  $\{b_k\} = 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0$ . En format bipolaire, on obtient la séquence :  $\{a_k\} = -1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, -1$ . Le signal transmis à la sortie du filtre à cosinus surélevé,  $s(t)$ , avec un facteur d'adoucissement  $\alpha = 0.5$ , est :

## 5.7 Largeur de bande en modulation par impulsion codée MIC (PCM)

En modulation PAM, la largeur de bande est fonction du signal analogique.

En PCM, la largeur de bande dépend du taux binaire et de la forme des impulsions utilisées pour la transmission.

La largeur de bande pour une conversion à  $n$  bits est bornée par (impulsions temporelles de forme  $\sin(x)/x$ ) :

$$B_{PCM} \geq \frac{1}{2} n f_s \geq nW$$

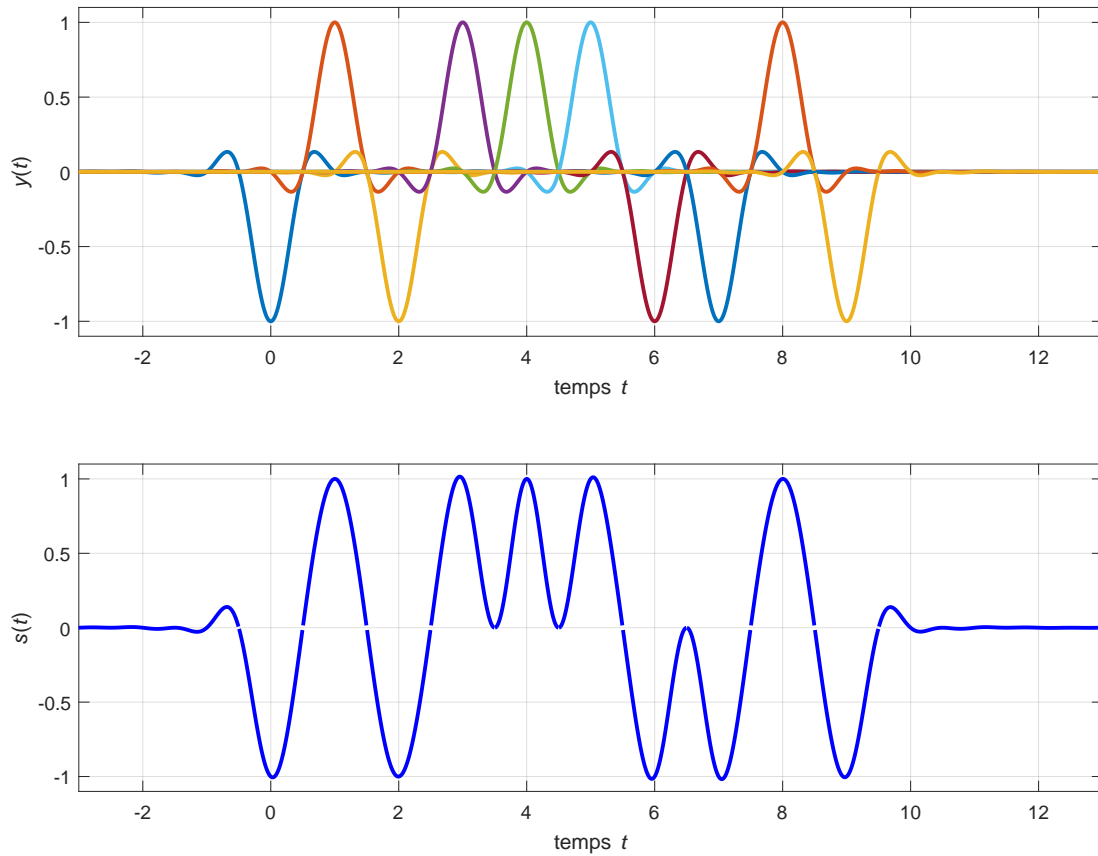


FIGURE 5.19 – Signal filtré  $s(t)$  à la sortie d'un filtre à cosinus surélevé avec un facteur d'adoucissement  $\alpha = 0.5$  pour la séquence binaire  $\{b_k\} = 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0$ .

Dans le cas d'impulsions temporelles rectangulaires (spectre en forme  $\sin(x)/x$ ), pour une conversion à  $n$  bits on a (échantillonnage au taux de Nyquist) :

$$B_{PCM} = n f_s \geq 2nW$$

## 5.8 Modulation Delta

La modulation Delta est une méthode de modulation numérique qui consiste à suréchantillonner un signal  $m(t)$  afin d'accroître la corrélation entre les échantillons  $\{m(nT_s)\}$ . On ne transmet pas la valeur de l'échantillon elle-même mais plutôt une séquence binaire représentant la différence entre l'échantillon présent,  $m(nT_s)$  et la

version quantifiée  $m_q(nT_s - T_s)$  de l'échantillon précédent. Cette différence est elle-même quantifiée sur deux niveaux : soit  $\Delta$  ou  $-\Delta$ .

Le modulateur Delta est constitué d'un quantificateur, d'un accumulateur et d'un codeur (voir figure 5.20). Le comparateur donne un signal d'erreur,  $e(nT_s)$ , qui est la différence d'un signal d'entrée (échantillonné  $m(nT_s)$ ) et de la version quantifiée  $m_q[(n-1)T_s]$  avec un retard d'un symbole :

$$e(nT_s) = m(nT_s) - m_q[(n-1)T_s] \quad (5.55)$$

Ce signal d'erreur,  $e(nT_s)$ , est alors quantifié sur deux niveaux :  $e_q(nT_s) = +\Delta$  ou  $-\Delta$  :

$$e_q(nT_s) = \Delta \operatorname{sgn}[e(nT_s)] \quad (5.56)$$

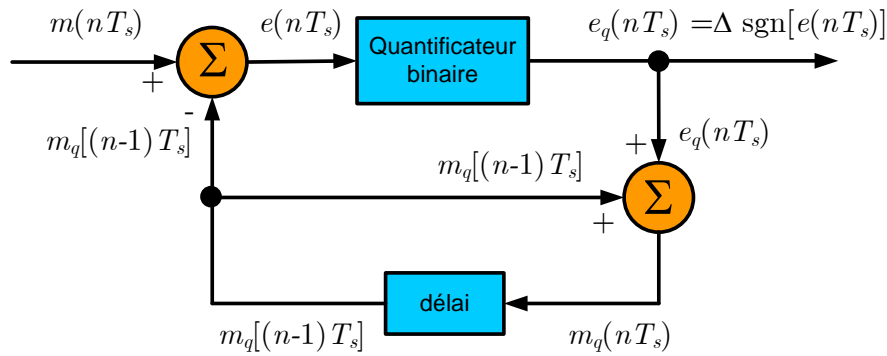


FIGURE 5.20: Modulateur Delta.

Ce signal,  $e_q(nT_s)$ , est alors appliqué à l'entrée d'un codeur binaire qui va produire le signal modulé Delta, c'est-à-dire une séquence binaire :

$$\begin{aligned} \{e_q(nT_s)\} &= +\Delta, +\Delta, -\Delta, +\Delta, -\Delta, \dots \\ \{s(nT_s)\} &= 1, 1, 0, 1, 0, \dots \end{aligned}$$

L'accumulateur, lui, reproduit le signal quantifié  $m_q(nT_s)$  à partir du signal d'erreur quantifié,  $e_q(nT_s)$ , et la valeur précédente du signal quantifié  $m_q[(n-1)T_s]$  :

$$\begin{aligned} m_q(nT_s) &= e_q(nT_s) + m_q[(n-1)T_s] \quad \text{ou encore} \quad (5.57) \\ m_q(nT_s) &= \sum_{i=1}^n e_q(iT_s) \end{aligned}$$

En fait, l'accumulateur agit comme un sommateur (ou un intégrateur) sur la séquence  $\{e_q(iT_s)\}_{i=1, \dots, n}$ . C'est la version retardée de  $T_s$  du signal quantifié,  $m_q[(n-1)T_s]$ , qui est appliqué à l'entrée du comparateur.

La démodulation d'un signal modulé Delta consiste à reconstruire le signal original à l'aide d'un accumulateur, tel que montré à la figure 5.21. Le signal à l'entrée du démodulateur Delta est :

$$e_q(nT_s) = \Delta \operatorname{sgn}[e(nT_s)] \quad (5.58)$$



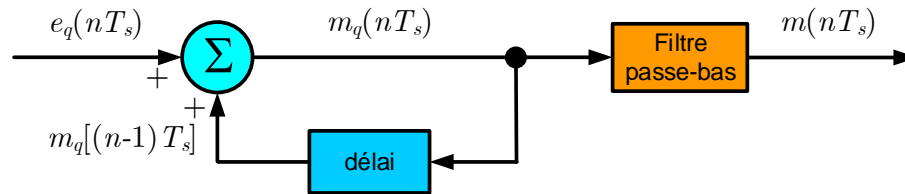


FIGURE 5.21: Démodulateur Delta.

À la sortie du sommateur (ou accumulateur) et donc à l'entrée du filtre passe-bas on obtient :

$$m_q(nT_s) = e_q(nT_s) + m_q[(n-1)T_s] \quad (5.59)$$

À la sortie de la mémoire de l'accumulateur on a l'échantillon quantifié au temps discret  $(n-1)T_s$ , i.e.  $m_q[(n-1)T_s]$ . Le filtre passe-bas donne enfin une estimation (non-quantifiée) du message transmis :  $\hat{m}(nT_s)$ .

La modulation Delta est sujette à deux types de bruits, ou distorsions (figure 5.22) : la *distortion granulaire* ("granular noise") et la *distortion de dépassement de la pente* ("slope overload distortion").

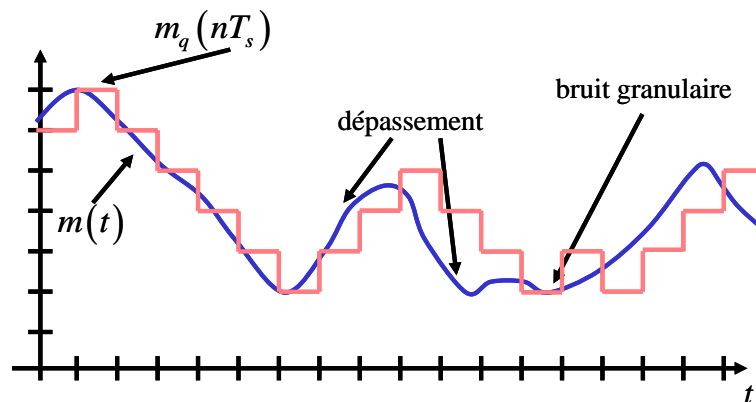


FIGURE 5.22: Modulation Delta : bruit granulaire et distorsion de dépassement.

Le bruit granulaire (figure 5.22) est dû à la hauteur du pas de quantification  $\Delta$ . Plus petit est la hauteur du pas quantification  $\Delta$ , plus petit est le bruit granulaire.

La distorsion de dépassement de la pente se produit lorsque la séquence modulée Delta ne peut pas suivre des variations trop rapides du signal original  $m(t)$  : elle dépend aussi du pas de quantification  $\Delta$ .

---

### Exemple 5.6 : Modulation Delta

---

Soit un signal  $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$  [volts]. On désire moduler ce signal en utilisant la modulation Delta avec un pas de  $\Delta$  [volts] et une période d'échantillonnage

de  $T_s$  [secondes]. Quelle est la valeur minimale du pas  $\Delta$  de la modulation Delta afin de prévenir les dépassements (*slope overload*) ?

La variation maximale (ou pente) du signal  $m(t)$  est obtenue de sa dérivée par rapport au temps :

$$\begin{aligned}\max \left[ \left| \frac{d}{dt} [m(t)] \right| \right] &= \max \left[ \left| \frac{d}{dt} [A_m \cos(2\pi f_m t)] \right| \right] \\ \max \left[ \left| \frac{d}{dt} [m(t)] \right| \right] &= \max [|-A_m 2\pi f_m \sin(2\pi f_m t)|] \\ \max \left[ \left| \frac{d}{dt} [m(t)] \right| \right] &= 2\pi A_m f_m \text{ [volts/seconde]}\end{aligned}$$

Pour pouvoir suivre le signal  $m(t)$ , il faut que la pente du signal modulé Delta soit plus grande ou égale à la pente maximale de  $m(t)$  :  $\frac{\Delta}{T_s} \geq 2\pi A_m f_m$ . Donc, pour éviter le dépassement, il faut que :

$$\Delta \geq 2\pi A_m f_m T_s = 2\pi A_m \left( \frac{T_s}{T_m} \right) \text{ [volts]}$$

avec  $T_m = \frac{1}{f_m}$ . Autrement dit, il faut que la période d'échantillonnage soit :

$$T_s \leq \frac{\Delta}{2\pi A_m} T_m \text{ [secondes]}$$

La fréquence d'échantillonnage doit donc être supérieure à :

$$f_s \geq \frac{2\pi A_m}{\Delta} f_m \text{ [Hertz]}$$

On doit donc limiter l'amplitude maximale du message  $m(t)$ , i.e.  $A_m$  à :

$$A_m \leq \frac{\Delta}{2\pi f_m T_s} = \frac{\Delta}{2\pi} \left( \frac{T_m}{T_s} \right) \text{ [volts]}$$

La puissance maximale (résistance normalisée à 1  $\Omega$ ) du message,  $P_{signal}$ , est limitée à :

$$P_{signal} = \frac{A_m^2}{2} \leq \frac{\left( \frac{\Delta}{2\pi f_m T_s} \right)^2}{2} = \frac{\Delta^2}{8\pi^2 f_m^2 T_s^2} = \frac{\Delta^2}{8\pi^2} \left( \frac{T_m}{T_s} \right)^2 \text{ [watts]}$$

On peut déterminer la densité spectrale de puissance de bruit de quantification avec un pas de quantification de  $\Delta$  en modulation Delta.

$$P_{bruit}(f) = \frac{\Delta^2}{6f_s}$$

La puissance du bruit de quantification correspondante est :

$$\begin{aligned} P_{bruit} &= \langle n^2(t) \rangle = \int_{-W}^W P_{bruit}(f) df \\ P_{bruit} &= \frac{\Delta^2 W}{3f_s} \\ P_{bruit} &= \frac{4\pi^2 A_m^2 f_m^2 W}{3f_s^3} \text{ [watts]} \end{aligned}$$

Le rapport signal-à-bruit de quantification en modulation Delta pour un signal sinusoïdal est donc :

$$SQNR = \left( \frac{P_{signal}}{P_{bruit}} \right) = \frac{3}{8\pi^2} \left( \frac{f_s^3}{f_m^2 W} \right) \quad (\text{signal sinusoïdal})$$

Par exemple, pour un signal audio de téléphonie  $m(t)$  de largeur de bande  $W = 4$  kHz (dominé par les composantes à 800 Hz) et de valeur pointe  $m_{\text{pointe}}$ , l'effet de dépassement (*slope overload*) est supposé négligeable si :

$$\Delta \geq \frac{2\pi(800)m_{\text{pointe}}}{f_s}$$

La puissance du bruit de quantification est donnée par  $P_{bruit}$  :

$$P_{bruit} = \langle n^2(t) \rangle = \int_{-W}^W P_{bruit}(f) df = \frac{\Delta^2 W}{3f_s} = \frac{4\pi^2(800)^2 m_{\text{pointe}}^2 W}{3f_s^3} \quad \text{[watts]}$$

Le rapport signal-à-bruit de quantification en modulation Delta est alors :

$$\left( \frac{S}{N} \right) = \left( \frac{P_{signal}}{P_{bruit}} \right) = \frac{\langle m^2(t) \rangle}{\langle n^2(t) \rangle} = \frac{3f_s^3}{(2\pi \cdot 800)^2 W} \left( \frac{\langle m^2(t) \rangle}{m_{\text{pointe}}^2} \right)$$

où  $\langle m^2(t) \rangle / m_{\text{pointe}}^2$  représente le rapport de la puissance moyenne sur la puissance pointe du signal audio.

---

