

Modulation de fréquence et modulation de phase

4.1 Modulation d'angle

La modulation d'angle, qui comprend la modulation de fréquence (ou modulation FM) ainsi que la modulation de phase (modulation PM) est une forme de modulation analogique très importante pour la quelle l'information à transmettre $m(t)$ vient moduler l'angle de la porteuse plutôt que son amplitude.

Considérons un message $m(t)$ en bande de base :

$$m(t) \iff M(f) \tag{4.1}$$

En modulation d'angle, le signal en bande de base, ou message, $m(t)$ module l'angle ψ de la porteuse $c(t)$. On exprime le signal modulé en angle de la façon suivante :

$$s(t) = A_c \cos[\psi(t)] \tag{4.2}$$

où $\psi(t)$ est la phase du signal modulé. C'est la phase de la porteuse $\psi(t)$ qui contient l'information à transmettre alors que l'amplitude de la porteuse, c'est-à-dire A_c , demeure constante.

La *fréquence instantanée* du signal modulé, que l'on désigne ici par $f_i(t)$, est définie comme étant la dérivée de la phase ψ par rapport au temps :

$$f_i(t) = \frac{\omega_i(t)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{d[\psi(t)]}{dt} \tag{4.3}$$

Ici, $\omega_i(t)$ est la fréquence angulaire instantanée exprimée en radians par seconde.

Maintenant, si nous considérons un signal modulé $s(t)$ en bande passante à une fréquence porteuse f_c , alors on peut réécrire l'expression du signal $s(t)$:

$$\boxed{s(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \theta(t))} \quad (4.4)$$

où $\theta(t)$ est la phase du signal contenant le message $m(t)$.

La fréquence instantanée du signal $s(t)$ devient alors :

$$\begin{aligned} f_i(t) &= \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} [\psi(t)] \\ f_i(t) &= \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} [2\pi f_c t + \theta(t)] \\ f_i(t) &= \frac{1}{2\pi} \left[2\pi f_c + \frac{d}{dt} [\theta(t)] \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\boxed{f_i(t) = f_c + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} [\theta(t)]} \quad (4.6)$$

Nous allons considérer maintenant plus spécifiquement la modulation de phase (modulation PM) et la modulation de fréquence (modulation FM).

4.2 Modulation de phase (modulation PM)

En modulation de phase, la phase $\theta(t)$ du signal modulé est obtenue tout simplement en multipliant le message à moduler $m(t)$ par une constante de proportionnalité, la sensibilité de phase du modulateur de phase k_p , dont les unités sont en radians par volt (si $m(t)$ est exprimé en volts) :

$$\boxed{\theta(t) = k_p m(t)} \quad (4.7)$$

Le signal modulé en phase, que l'on identifie par $s_{PM}(t)$ s'écrit de la manière suivante :

$$\boxed{s_{PM}(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + k_p m(t))} \quad (4.8)$$

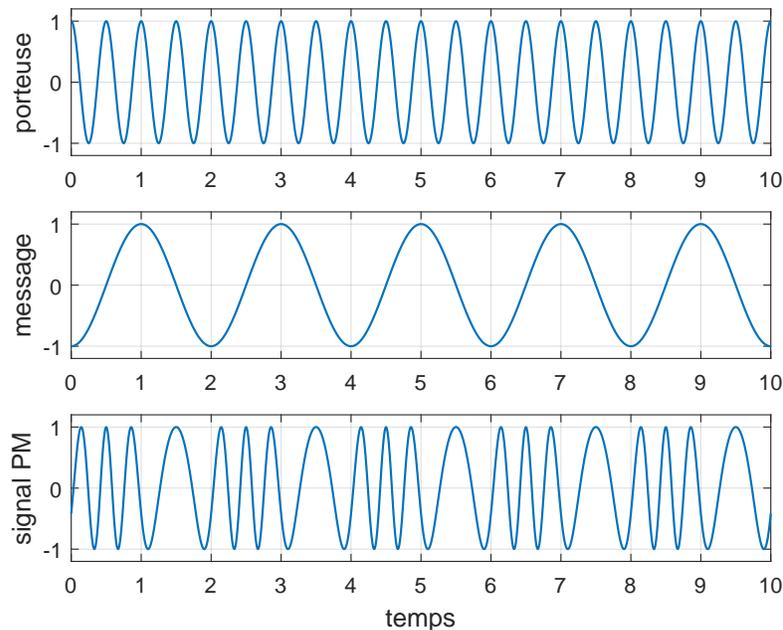
Un signal modulé en phase $s_{PM}(t)$ par une sinusoïde pure aura dans le temps l'allure montré à la figure 4.1.

Le signal modulé en phase $s_{PM}(t)$ illustré à la figure 4.2 est modulé par un message $m(t)$ limité en fréquence.

En utilisant la relation trigonométrique connue :

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (4.9)$$

on peut réécrire $s_{PM}(t)$ comme :

FIGURE 4.1: Signal sinusoïdal $m(t)$ modulé en phase : $s_{PM}(t)$.

$$s_{PM}(t) = A_c \{ [\cos(2\pi f_c t) \cos(k_p m(t))] - [\sin(2\pi f_c t) \sin(k_p m(t))] \} \quad (4.10)$$

Il ne s'agit donc plus d'une méthode de modulation linéaire comme c'était le cas en modulation d'amplitude.

La fréquence instantanée $f_i(t)$ en modulation de phase est égale à :

$$f_i(t) = f_c + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} [k_p m(t)] \quad (4.11)$$

soit :

$$f_i(t) = f_c + \frac{k_p}{2\pi} \frac{d}{dt} [m(t)] \quad (4.12)$$

4.3 Modulation de fréquence (modulation FM)

On peut également réaliser une modulation d'angle en faisant varier la fréquence instantanée du signal modulé autour de sa fréquence porteuse f_c , et ce, proportionnellement à l'amplitude instantanée du message $m(t)$ en bande de base.

Il s'agit alors de la modulation de fréquence et le signal modulé résultant, que l'on dénote par $s_{FM}(t)$, s'exprime comme suit :

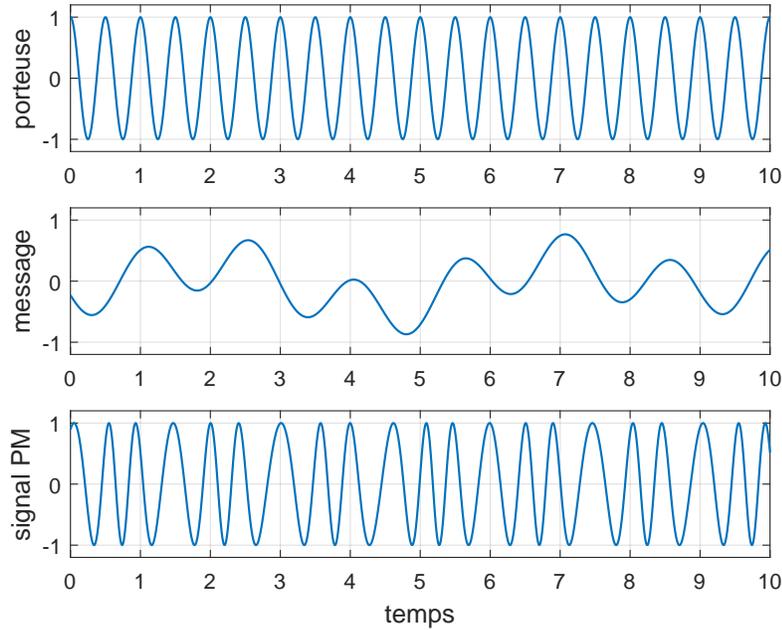


FIGURE 4.2: Signal arbitraire mais limité en fréquence $m(t)$ modulé en phase : $s_{PM}(t)$.

$$s_{FM}(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + k_f \int_0^t m(\tau) d\tau) \quad (4.13)$$

c'est-à-dire que la phase $\theta(t)$ comprenant le message $m(t)$ est donnée par :

$$\theta(t) = k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \quad (4.14)$$

Les unités de la constante de proportionnalité (ou *constante de déviation de fréquence*) k_f sont en radians par volt-seconde (en supposant toujours que le signal en bande de base $m(t)$ est en volts).

La fréquence instantanée du signal modulé en fréquence $f_i(t)$ est dans ce cas-ci :

$$f_i(t) = f_c + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \left[k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right] = f_c + \frac{k_f}{2\pi} \frac{d}{dt} \left[\int_0^t m(\tau) d\tau \right] \quad (4.15)$$

$$f_i(t) = f_c + \frac{k_f}{2\pi} m(t) \quad (4.16)$$

La figure 4.3 montre l'allure de signaux modulés en phase, $s_{PM}(t)$, et en fréquence, $s_{FM}(t)$, par le même message sinusoïdal $m(t)$:

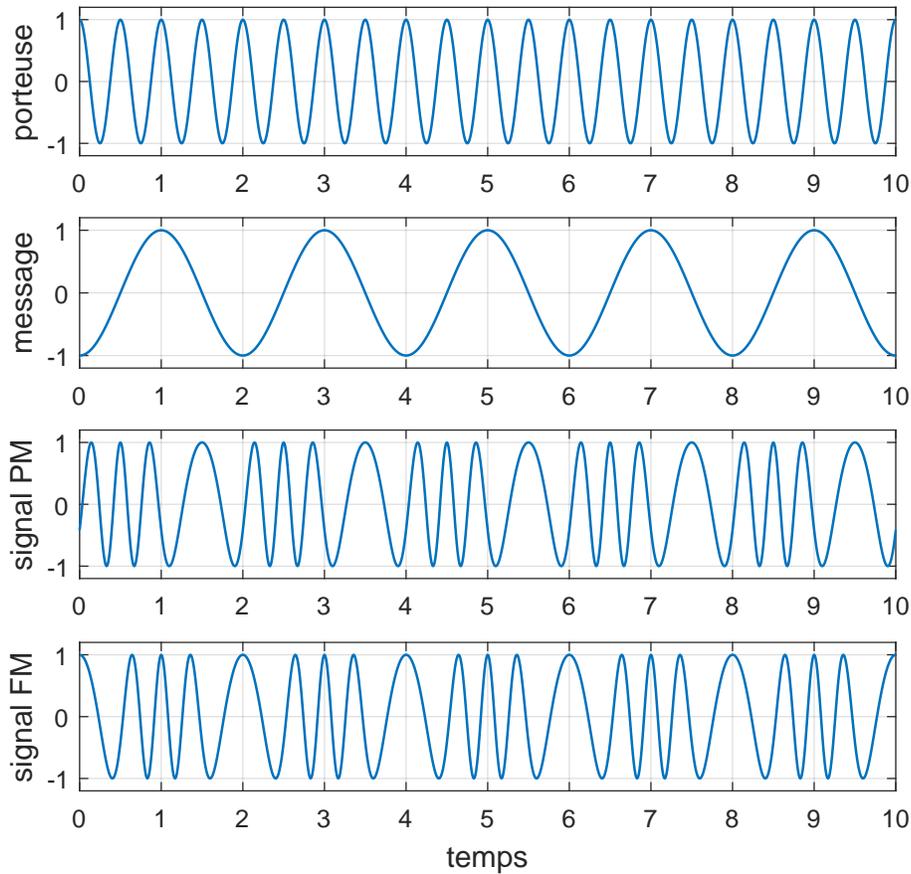


FIGURE 4.3: Signal sinusoïdal $m(t)$ modulé en phase, $s_{PM}(t)$, et en fréquence, $s_{FM}(t)$.

4.3.1 Déviation de phase et indice de modulation de phase

Considérons à nouveau le signal modulé en phase $s_{PM}(t)$:

$$s_{PM}(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \underbrace{k_p m(t)}_{\theta(t)}] \quad (4.17)$$

Le processus de démodulation de phase d'un tel signal $s_{PM}(t)$ consiste à déterminer la phase $\theta(t) = k_p m(t)$, puis à en extraire le message $m(t)$ lui-même. On définit la *déviation maximale de phase* $\Delta\theta_{max}$ comme étant :

$$\Delta\theta_{max} \triangleq \max [|\theta(t)|] = k_p \max [|m(t)|] \quad (4.18)$$

où $|\theta(t)|$ et $|m(t)|$ représentent respectivement les valeurs absolues de $\theta(t)$ et de $m(t)$.

L'indice de modulation de phase β_p d'un signal $s_{PM}(t)$ est défini par :

$$\boxed{\beta_p \triangleq \Delta\theta_{max}} \quad (4.19)$$

et est donc égal à la déviation maximale de phase.

4.3.2 Déviation de fréquence et indice de modulation de fréquence

Pour un signal qui est maintenant modulé en fréquence, i.e. en modulation FM, le principe de démodulation consiste à estimer la fréquence instantanée $f_i(t)$ du signal, puis à en soustraire la fréquence (constante) f_c de la porteuse et enfin à récupérer le message originalement transmis $m(t)$.

$$s_{FM}(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + k_f \int_0^t m(\tau) d\tau) \quad (4.20)$$

La déviation de fréquence relative à la porteuse est :

$$\boxed{\Delta f = f_i(t) - f_c = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{d}{dt} [\theta(t)] \right]} \quad (4.21)$$

La déviation maximale de fréquence Δf_{max} est quant à elle définie par :

$$\boxed{\Delta f_{max} \triangleq \frac{1}{2\pi} \max \left\{ \left| \frac{d}{dt} [\theta(t)] \right| \right\} = \frac{k_f}{2\pi} \max [|m(t)|]} \quad (4.22)$$

L'indice de modulation de fréquence β_f d'un signal $s_{FM}(t)$, modulé par un message en bande de base $m(t)$ de spectre $M(f) = \mathcal{F}[m(t)]$ de largeur de bande W , est donné par :

$$\boxed{\beta_f \triangleq \frac{\Delta f_{max}}{W}} \quad (4.23)$$

c'est-à-dire par le rapport de sa déviation maximale de fréquence par sa largeur de bande.

Exemple 4.1 : Indice de modulation de signaux sinusoïdaux modulés en angle

Soit $m(t)$ un *signal cosinusoidal* en bande de base de fréquence f_m (ce message $m(t)$ peut représenter par exemple la composante spectrale la plus élevée d'un autre message *arbitraire* qui serait de largeur de bande $B = f_m$) :

$$m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$$

La fréquence instantanée $f_i(t)$ d'un signal modulé en fréquence $s_{FM}(t)$ par ce message $m(t)$ est alors :

$$f_i(t) = f_c + \frac{k_f}{2\pi} m(t) = f_c + \frac{k_f}{2\pi} A_m \cos(2\pi f_m t)$$

où évidemment $\cos(2\pi f_m t) \in [-1, 1]$. Dans ce cas particulier, la déviation maximale de fréquence Δf_{max} est :

$$\Delta f_{max} = \frac{A_m k_f}{2\pi}$$

Le signal modulé $s_{FM}(t)$ est alors :

$$s_{FM}(t) = A_c \cos \left[2\pi f_c t + k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right]$$

et sa phase θ , elle, est donnée par :

$$\theta(t) = k_f \int_0^t m(\tau) d\tau$$

Dans le cas particulier qui nous intéresse où $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^t m(\tau) d\tau &= \int_0^t A_m \cos(2\pi f_m \tau) d\tau \\ \int_0^t m(\tau) d\tau &= A_m \int_0^t \cos(2\pi f_m \tau) d\tau \\ \int_0^t m(\tau) d\tau &= A_m \frac{1}{2\pi f_m} \sin(2\pi f_m \tau) \Big|_{-\infty}^t \\ \int_0^t m(\tau) d\tau &= \frac{A_m}{2\pi f_m} \sin(2\pi f_m t) \end{aligned}$$

en supposant qu'à $\tau = -\infty$, $\sin(2\pi f_m \tau) = 0$.

Le signal modulé en fréquence $s_{FM}(t)$ peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned} s_{FM}(t) &= A_c \cos \left[2\pi f_c t + k_f \frac{A_m}{2\pi f_m} \sin(2\pi f_m t) \right] \\ s_{FM}(t) &= A_c \cos \left[2\pi f_c t + \frac{k_f A_m}{2\pi f_m} \sin(2\pi f_m t) \right] \\ s_{FM}(t) &= A_c \cos [2\pi f_c t + \beta_f \sin(2\pi f_m t)] \end{aligned}$$

où l'indice de modulation FM $\beta_f = \frac{k_f A_m}{2\pi f_m}$ pour $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$.

Notez que si on avait plutôt modulé $m(t)$ en phase, on aurait obtenu $s_{PM}(t)$:

$$\begin{aligned} s_{PM}(t) &= A_c \cos [2\pi f_c t + k_p m(t)] \\ s_{PM}(t) &= A_c \cos [2\pi f_c t + k_p A_m \cos(2\pi f_m t)] \\ s_{PM}(t) &= A_c \cos [2\pi f_c t + \beta_p \cos(2\pi f_m t)] \end{aligned}$$

avec un indice de modulation de phase $\beta_p = k_p A_m$ pour ce même message $m(t)$.

mo

4.4 Modulation de fréquence à bande étroite

Nous avons vu qu'un signal $s_{FM}(t)$ modulé en fréquence par un message $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$ est :

$$s_{FM}(t) = A_c \cos [2\pi f_c t + \beta_f \sin(2\pi f_m t)] \quad (4.24)$$

avec $\beta_f = \frac{k_f A_m}{2\pi f_m}$.

Si l'indice de modulation $\beta_f \ll 1$, on dit que le signal modulé en fréquence $s_{FM}(t)$ est à bande étroite. Si $\beta_f > 1$, le signal FM $s_{FM}(t)$ est à large bande. Considérons que l'indice de modulation $\beta_f \ll 1$, alors le signal FM est :

$$\begin{aligned} s_{FM}(t) &= A_c \cos [2\pi f_c t + \beta_f \sin(2\pi f_m t)] \\ s_{FM}(t) &= A_c \cos \left[\underbrace{2\pi f_c t}_{\alpha} + \underbrace{\theta(t)}_{\beta} \right] \end{aligned} \quad (4.25)$$

Or $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$. En modulation de fréquence à bande étroite, $\beta_f \ll 1$: on peut donc faire les approximations suivantes : $\cos \beta \approx 1$ et $\sin \beta \approx \beta$.

$$\boxed{s_{FM}(t) \approx \underbrace{A_c \cos(2\pi f_c t)}_{\text{porteuse pure}} - \underbrace{A_c \theta(t) \sin(2\pi f_c t)}_{\text{signal modulé}}} \quad (4.26)$$

On remarque que le signal modulé en fréquence à bande étroite $s_{FM}(t)$ est constitué d'une porteuse pure $A_c \cos(2\pi f_c t)$ et d'un signal modulé à bande étroite $A_c \theta(t) \sin(2\pi f_c t)$.

Ce signal $s_{FM}(t)$ ressemble à un signal AM conventionnel $s_{AM}(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) + A_c k_a m(t) \cos(2\pi f_c t)$. On peut donc générer un signal FM à bande étroite de manière semblable à la modulation AM conventionnelle.

4.4.1 Représentation complexe en bande de base d'un signal FM à bande étroite

Nous allons nous intéresser ici à la représentation vectorielle d'un signal modulé en fréquence à bande étroite dans le plan complexe. Pour ce faire, nous allons choisir

$m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$. Par la suite, nous allons comparer ce diagramme vectoriel avec celui que nous obtiendrions en modulation AM conventionnelle avec le même message $m(t)$. Posons $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$. Le signal FM, est alors :

$$s_{FM}(t) = A_c \cos [2\pi f_c t + \beta_f \sin(2\pi f_m t)]. \quad (4.27)$$

Si l'indice de modulation $\beta_f \ll 1$, alors

$$s_{FM}(t) \approx A_c \cos(2\pi f_c t) - A_c \theta(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (4.28)$$

où $\theta(t) = \beta_f \sin(2\pi f_m t)$:

$$s_{FM}(t) \approx A_c \cos(2\pi f_c t) - A_c \beta_f \sin(2\pi f_m t) \sin(2\pi f_c t) \quad (4.29)$$

Considérant que :

$$\begin{aligned} \cos(2\pi f_c t) &= \Re [e^{j2\pi f_c t}] & \text{et} & \\ \sin(2\pi f_c t) &= \Im [e^{j2\pi f_c t}] = \Re [-je^{j2\pi f_c t}] \end{aligned} \quad (4.30)$$

et en utilisant la relation d'Euler pour le sinus : $\sin \phi = \frac{e^{j\phi} - e^{-j\phi}}{2j}$, on peut réécrire $s_{FM}(t)$ comme étant :

$$\begin{aligned} s_{FM}(t) &\approx A_c \Re [e^{j2\pi f_c t}] - A_c \beta_f \sin(2\pi f_m t) \Re [-je^{j2\pi f_c t}] & (4.31) \\ s_{FM}(t) &\approx A_c \Re \left\{ e^{j2\pi f_c t} [1 + j\beta_f \sin(2\pi f_m t)] \right\} \\ s_{FM}(t) &\approx A_c \Re \left\{ e^{j2\pi f_c t} \left[1 + j\beta_f \frac{e^{j2\pi f_m t} - e^{-j2\pi f_m t}}{2j} \right] \right\} \end{aligned}$$

On peut donc représenter sous forme vectorielle (équivalent complexe en bande de base), le signal FM à bande étroite :

$$s_{FM}(t) \approx \Re \left\{ e^{j2\pi f_c t} \underbrace{\left[A_c + \frac{A_c \beta_f}{2} e^{j2\pi f_m t} - \frac{A_c \beta_f}{2} e^{-j2\pi f_m t} \right]}_{\text{représentation complexe en bande de base : } \tilde{s}_{FM}(t)} \right\} \quad (4.32)$$

Le diagramme vectoriel de la figure 4.4 indique que β_f étant faible ($\beta_f \ll 1$), le vecteur résultant, c'est-à-dire la représentation complexe en bande de base $\tilde{s}_{FM}(t)$, est un vecteur dont l'amplitude varie mais peu et dont la phase varie également en fonction du temps.

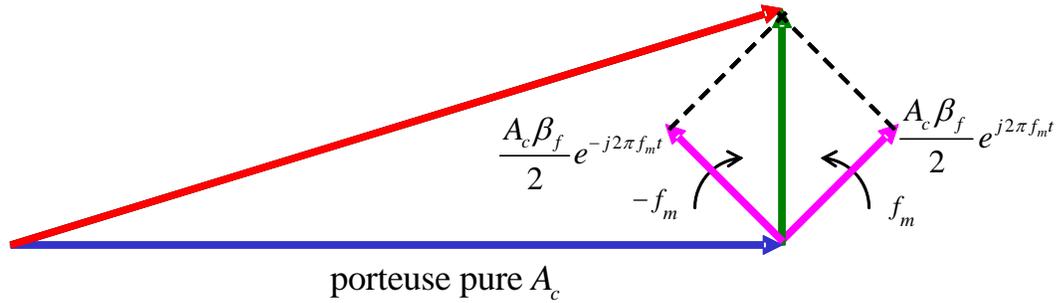


FIGURE 4.4: Diagramme vectoriel (équivalent complexe en bande de base) représentant un signal FM à bande étroite.

4.4.2 Modulateurs PM et FM à bande étroite

Modulateur PM à bande étroite

L'expression générale d'un signal modulé en angle est la suivante :

$$s(t) = A_c \cos [2\pi f_c t + \theta(t)] \quad (4.33)$$

Cette expression peut s'écrire, en utilisant la relation $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$:

$$s(t) = A_c [\cos(2\pi f_c t) \cos(\theta(t)) - \sin(2\pi f_c t) \sin(\theta(t))]$$

Maintenant, si $\beta \ll 1$ (i.e. $|\theta(t)| \ll 1$), alors on peut supposer que $\cos \beta \approx 1$ et $\sin \beta \approx \beta$, et donc :

$$s(t) \approx A_c \cos(2\pi f_c t) - A_c \theta(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (4.34)$$

Plus spécifiquement, pour de la modulation de phase à bande étroite, on a $\theta(t) = k_p m(t)$ et :

$$s_{PM}(t) \approx A_c \cos(2\pi f_c t) - A_c k_p m(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (4.35)$$

En modulation de fréquence à bande étroite, où $\theta(t) = k_f \int_0^t m(\tau) d\tau$, on obtient :

$$s_{FM}(t) \approx A_c \cos(2\pi f_c t) - A_c \left[k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right] \sin(2\pi f_c t) \quad (4.36)$$

La distinction entre la modulation de phase et la modulation de fréquence est que $\theta(t)$ est soit directement proportionnelle au message $m(t)$ ou à l'intégrale du message. Dans les deux cas, on peut employer un modulateur de phase. Le modulateur AM conventionnel peut ainsi être modifié pour effectuer la modulation de phase à bande étroite :

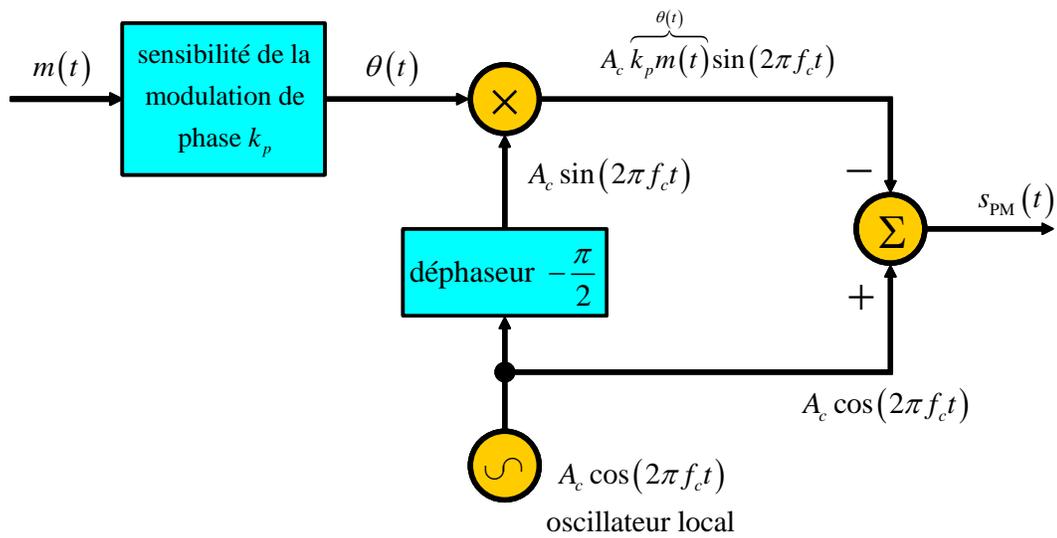


FIGURE 4.5: Modulateur PM à bande étroite.

Modulateur FM à bande étroite

En ajoutant un intégrateur à l'entrée d'un modulateur de phase à bande étroite, on peut construire un modulateur de fréquence à bande étroite :

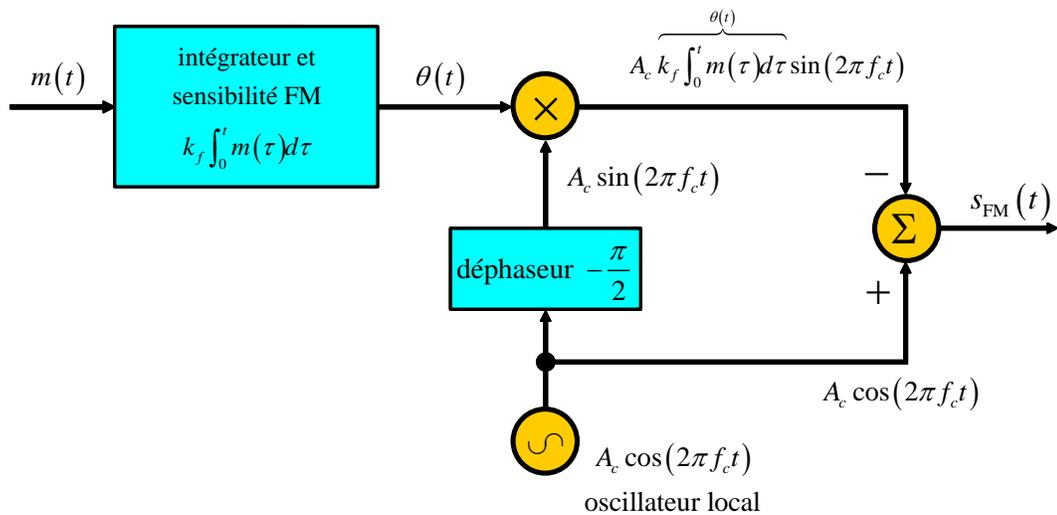


FIGURE 4.6: Modulateur FM à bande étroite.

4.5 Modulation de fréquence à large bande

L'expression générale d'un signal modulé en fréquence est :

$$s_{FM}(t) = A_c \cos \left[2\pi f_c t + k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right] \quad (4.37)$$

Pour un message sinusoïdal $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$, c'est-à-dire une simple *tonalité*, $s_{FM}(t)$ devient :

$$s_{FM}(t) = A_c \cos [2\pi f_c t + \beta_f \sin(2\pi f_m t)] \quad (4.38)$$

Lorsque l'indice de modulation $\beta_f > 1$, on ne peut plus utiliser l'approximation :

$$\cos(\alpha + \beta) \approx \cos \alpha - \beta \sin \alpha \quad (4.39)$$

On peut cependant utiliser l'expression suivante :

$$\cos(\alpha + \beta) = \Re \left\{ e^{j(\alpha + \beta)} \right\} \quad (4.40)$$

On peut exprimer $s_{FM}(t)$ par :

$$\begin{aligned} s_{FM}(t) &= A_c \cos [2\pi f_c t + \beta_f \sin(2\pi f_m t)] & (4.41) \\ s_{FM}(t) &= A_c \Re \left\{ e^{j[2\pi f_c t + \beta_f \sin(2\pi f_m t)]} \right\} \\ s_{FM}(t) &= \underbrace{A_c}_{\text{constante}} \Re \left\{ \underbrace{e^{j2\pi f_c t}}_{\text{porteuse}} \cdot \underbrace{e^{j\beta_f \sin(2\pi f_m t)}}_{\text{périodique}} \right\} \end{aligned}$$

Le terme $e^{j\beta_f \sin(2\pi f_m t)}$ est en fait une fonction complexe périodique du temps de période $T_m = \frac{1}{f_m}$. Cette fonction périodique peut donc être décomposée en une série de Fourier complexe, c'est-à-dire $e^{j\beta_f \sin(2\pi f_m t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_m t}$. Les coefficients $\{c_n\}$ de la série de Fourier sont donnés par :

$$c_n = f_m \int_{t_0}^{t_0 + T_m} f(t) e^{-j2\pi n f_m t} dt \quad (4.42)$$

avec $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ et $f(t) = e^{j\beta_f \sin(2\pi f_m t)}$.

On peut choisir le début de l'intervalle d'intégration à $t_0 = 0$. Les coefficients $\{c_n\}$ sont :

$$\begin{aligned} c_n &= f_m \int_0^{T_m} f(t) e^{-j2\pi n f_m t} dt & (4.43) \\ c_n &= f_m \int_0^{T_m} e^{j\beta_f \sin(2\pi f_m t)} e^{-j2\pi n f_m t} dt \\ c_n &= f_m \int_0^{T_m} e^{j[\beta_f \sin(2\pi f_m t) - 2\pi n f_m t]} dt \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable suivant : $x = 2\pi f_m t$, alors $\frac{d}{dt} x = \frac{d}{dt} 2\pi f_m t = 2\pi f_m$ et $dt = \frac{1}{2\pi f_m} dx$. L'expression de c_n devient :

$$c_n = f_m \frac{1}{2\pi f_m} \int_{0 \times 2\pi f_m}^{T_m \times 2\pi f_m} e^{j[\beta_f \sin x - nx]} dx \quad (4.44)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{j[\beta_f \sin x - nx]} dx$$

Cette intégrale est assez difficile à calculer. Cependant, on la retrouve dans plusieurs problèmes de physique et elle est donnée dans les tables de mathématiques : il s'agit des *fonctions de Bessel de première espèce et d'ordre n* (voir la figure 4.7 et l'annexe A) :

$$J_n(\beta_f) \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{j[\beta_f \sin x - nx]} dx \quad (4.45)$$

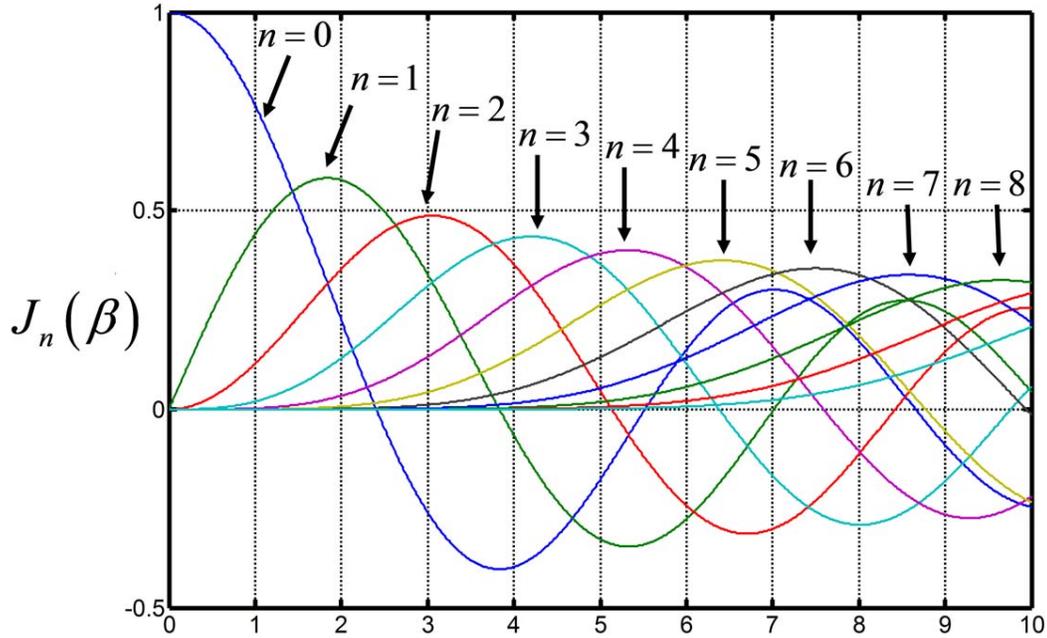


FIGURE 4.7: Fonctions de Bessel de première espèce et d'ordre n : $J_n(\beta)$.

On peut maintenant écrire le développement en série de Fourier de la fonction périodique :

$$e^{j\beta_f \sin(2\pi f_m t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_m t} \quad (4.46)$$

$$e^{j\beta_f \sin(2\pi f_m t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta_f) e^{j2\pi n f_m t}$$

Maintenant, le signal modulé en fréquence à large bande devient :

$$s_{FM}(t) = A_c \Re \left\{ e^{j2\pi f_c t} \cdot e^{j\beta_f \sin(2\pi f_m t)} \right\} \quad (4.47)$$

$$s_{FM}(t) = A_c \Re \left\{ e^{j2\pi f_c t} \cdot \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta_f) e^{j2\pi n f_m t} \right] \right\}$$

$$s_{FM}(t) = A_c \Re \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta_f) e^{j[2\pi f_c t + 2\pi n f_m t]} \right\}$$

En prenant la partie réelle de l'exponentielle complexe (notez ici que $J_n(\beta_f)$ est déjà une fonction réelle), on obtient finalement :

$$s_{FM}(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta_f) \cos(2\pi f_c t + 2\pi n f_m t) \quad (4.48)$$

La modulation d'un message cosinusoidal $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$ en modulation de fréquence à large bande produit donc un nombre infini de composantes spectrales! Cependant, les composantes spectrales d'ordre supérieur deviennent rapidement négligeables. On peut donc considérer que le spectre du signal FM résultant est *en pratique* limité en fréquence.

L'allure générale du spectre d'un signal modulé en fréquence à large bande dépend de l'indice de modulation $\beta_f = \frac{k_f A_m}{2\pi f_m}$ et de l'ordre n de la $n^{\text{ième}}$ harmonique.

Remarque : Les propriétés des fonctions de Bessel de première espèce $J_n(\beta)$ sont :

1. $J_n(\beta)$ est réelle,
2. $J_n(\beta) = -J_{-n}(\beta)$ si n est impair,
3. $J_n(\beta) = J_{-n}(\beta)$ si n est pair,
4. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1$.

4.6 Densité spectrale de puissance et puissance moyenne d'un signal modulé en fréquence

Considérons un *signal modulant* de forme sinusoidal $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$. Si l'indice de modulation de fréquence β_f n'est pas négligeable devant l'unité, alors on obtient un signal modulé à large bande $s_{FM}(t)$:

$$s_{FM}(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta_f) \cos(2\pi f_c t + 2\pi n f_m t) \quad (4.49)$$

Son spectre (d'amplitude) $S_{FM}(f) \iff s_{FM}(t)$ s'obtient de sa transformée de Fourier, c'est-à-dire :

$$S_{FM}(f) = \frac{A_c}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta_f) \{ \delta(f - f_c - n f_m) + \delta(f + f_c + n f_m) \} \quad (4.50)$$

La densité spectrale de puissance $P_{FM}(f)$, exprimée en watts par Hertz, du signal FM $s_{FM}(t)$, de spectre $S_{FM}(f) = \mathcal{F}[s_{FM}(t)]$, est donnée en fonction de sa *fonction d'autocorrélation* $R_{FM}(\tau)$:

$$P_{FM}(f) \triangleq \mathcal{F}[R_{FM}(\tau)] = \mathcal{F} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_{FM}(t) s_{FM}(t + \tau) dt \right] \quad (4.51)$$

et où la fonction d'autocorrélation $R_{FM}(\tau)$ est :

$$R_{FM}(\tau) \triangleq \langle s_{FM}(t) s_{FM}(t + \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_{FM}(t) s_{FM}(t + \tau) dt \quad (4.52)$$

Pour un signal FM à large bande, la densité spectrale de puissance $P_{FM}(f)$ est :

$$P_{FM}(f) = \frac{A_c^2}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta_f) \{ \delta(f - f_c - n f_m) + \delta(f + f_c + n f_m) \} \quad (4.53)$$

La puissance moyenne P_{FM} du signal $s_{FM}(t)$ est égale à l'intégrale de sa densité spectrale de puissance $P_{FM}(f)$ l'ensemble des fréquences ($-\infty \leq f \leq \infty$) :

$$P_{FM} = \int_{-\infty}^{\infty} P_{FM}(f) df \quad (4.54)$$

Dans le cas qui nous intéresse, la puissance moyenne P_{FM} sera :

$$\begin{aligned} P_{FM} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{A_c^2}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta_f) \{ \delta(f - f_c - n f_m) + \delta(f + f_c + n f_m) \} \right\} df \\ P_{FM} &= \frac{A_c^2}{4} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta_f) \delta(f - f_c - n f_m) df + \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta_f) \delta(f + f_c + n f_m) \right\} df \\ P_{FM} &= \frac{A_c^2}{4} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta_f) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta_f) \right\} \end{aligned} \quad (4.55)$$

où $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta_f) = 1$ et donc :

$$P_{FM} = \frac{A_c^2}{2} \quad (4.56)$$

4.6.1 Largeur de bande effective

Nous avons vu qu'un signal modulé en fréquence $s_{FM}(t)$ est constitué d'un nombre infini de composantes spectrales lorsque le signal modulant, ou message, $m(t)$, est une sinusoïde pure : $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$.

Pour un message $m(t)$ quelconque mais limité en fréquence, c'est-à-dire :

$$M(f) = \begin{cases} \neq 0 & \text{pour } -W \leq f \leq W \\ = 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.57)$$

Le spectre $S_{FM}(f)$ du signal modulé $s_{FM}(t)$ sera lui aussi infini (et continu).

4.6.2 Largeur de bande effective d'un signal modulé en angle

Cependant, en pratique, l'énergie du signal modulé se retrouve autour de la fréquence porteuse f_c et devient rapidement négligeable au fur et à mesure que l'on s'en éloigne.

Approximation de Carson

La *règle de Carson* est une méthode empirique (et approximative) permettant de déterminer facilement la *largeur de bande effective de transmission* B_T d'un signal modulé en fréquence ou en phase.

$$B_T \triangleq 2(\beta + 1)W = 2\Delta f_{max} + 2W \quad (4.58)$$

où β représente l'indice de modulation FM ou PM du signal modulé, Δf_{max} la déviation maximale de fréquence et W la largeur de bande du message $m(t)$.

Approximation avec les harmoniques significatives

Dans le cas d'un message sinusoïdal $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$, le spectre du signal modulé, par exemple $S_{FM}(f)$, étant un *spectre de lignes*, on peut aussi déterminer le *nombre d'harmoniques significatives*, soit n_{max} , comme étant le plus grand entier n pour lequel

$$|J_n(\beta)| > 0.01 \quad (4.59)$$

La largeur de bande effective peut donc aussi être exprimée par :

$$B_T \triangleq 2n_{max}f_m \quad (4.60)$$

Exemple 4.2 : Largeur de bande d'un signal FM

Un signal FM, $s_{FM}(t)$ de fréquence porteuse $f_c = 10$ MHz module un signal sinusoïdal $m(t) = \cos(2\pi f_m t)$, i.e. $A_m = 1$, avec une déviation de fréquence maximale $\Delta f_{max} = 50$ kHz :

$$s_{FM}(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta_f) \cos(2\pi f_c t + 2\pi n f_m t)$$

On veut déterminer l'indice de modulation FM, β_f , la largeur de bande effective B_T , ainsi que le nombre de bandes latérales n_{max} pour différentes valeurs de la

fréquence du message f_m : 500 kHz, 500 Hz et 10 kHz. Le spectre (d'amplitude) du signal est :

$$S_{FM}(f) = \frac{A_c}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta_f) \{ \delta(f - f_c - n f_m) + \delta(f + f_c + n f_m) \}$$

La densité spectrale de puissance $P_{FM}(f)$ est alors donnée par :

$$P_{FM}(f) = \frac{A_c^2}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta_f) \{ \delta(f - f_c - n f_m) + \delta(f + f_c + n f_m) \}$$

et sa puissance totale est $P_{FM} = \frac{A_c^2}{2}$.

1. $f_m = 500$ kHz : $m(t) = \cos(2 \times 5 \times 10^5 \pi t)$. L'indice de modulation FM est égal à :

$$\beta_f = \frac{\Delta f_{max}}{W} = \frac{\Delta f_{max}}{f_m} = \frac{5 \times 10^4}{5 \times 10^5} = 0.1$$

L'indice de modulation $\beta_f = 0.1 \ll 1$, il s'agit d'un signal modulé en fréquence à bande étroite. Sa largeur de bande effective $B_T \approx 2f_m = 1$ MHz. Il n'y a donc qu'une bande latérale significative : $n_{max} = 1$. Si l'on utilise la règle de Carson, la largeur de bande effective à $B_T \approx 2(\Delta f_{max} + f_m) = 1.1$ MHz.

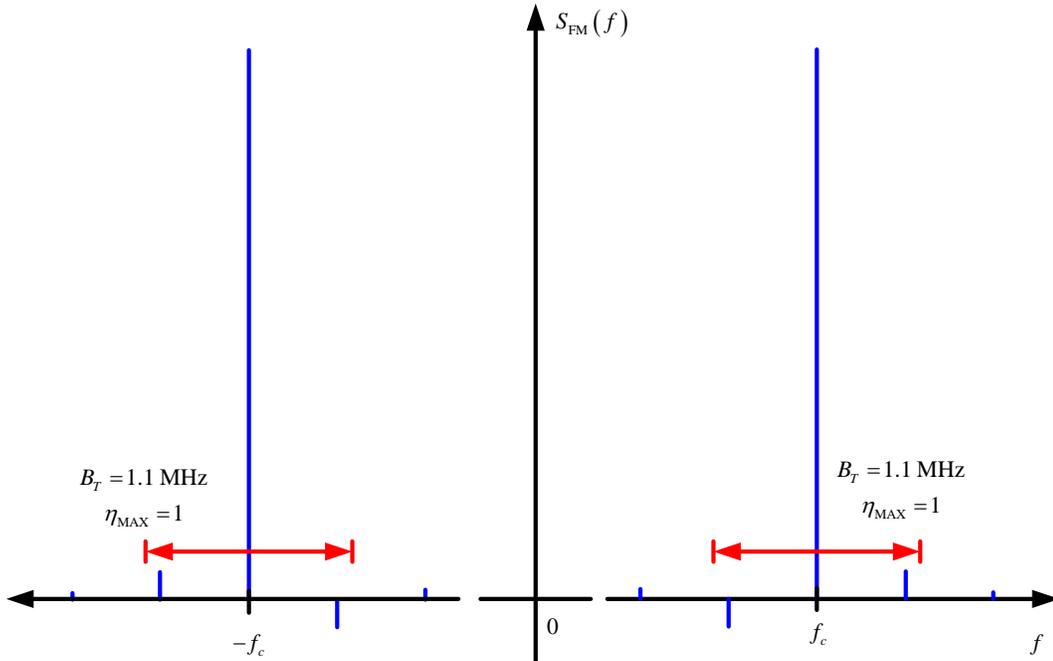


FIGURE 4.8: Spectre d'amplitude, $S_{FM}(f)$: $f_c = 10$ MHz, $m(t) = \cos(2\pi f_m t)$ et $f_m = 500$ kHz.

2. $f_m = 500$ Hz : $m(t) = \cos(2 \times 5 \times 10^2 \pi t)$. Cette fois-ci, l'indice de modulation est :

$$\beta_f = \frac{\Delta f_{max}}{W} = \frac{\Delta f_{max}}{f_m} = \frac{5 \times 10^4}{5 \times 10^2} = 100$$

et le signal FM est à large bande. Selon la règle de Carson, la largeur de bande effective à $B_T \approx 2(5 \times 10^4 + 500) = 101 \text{ kHz} \approx 2\Delta f_{max} = 100 \text{ kHz}$.

3. $f_m = 10 \text{ kHz}$: $m(t) = \cos(2 \times 10^4 \pi t)$. Ici, β_f est donné par :

$$\beta_f = \frac{\Delta f_{max}}{W} = \frac{\Delta f_{max}}{f_m} = \frac{5 \times 10^4}{10^4} = 5$$

En utilisant la règle de Caron, la largeur de bande effective est $B_T \approx 2(\Delta f_{max} + f_m) = 2(5 \times 10^4 + 10^4) = 120 \text{ kHz}$.

Le tableau A.1 indique que pour $\beta_f = 5$ le nombre de bandes latérales significatives $n_{max} = 8$ (ici, $J_8(5) = 0.0184$ et $J_9(5) = 0.0055$). La largeur de bande effective estimée avec l'approximation des bandes latérales significatives est donc $B_T \approx 2n_{max}f_m = 2(8 \times 10) = 160 \text{ kHz}$.

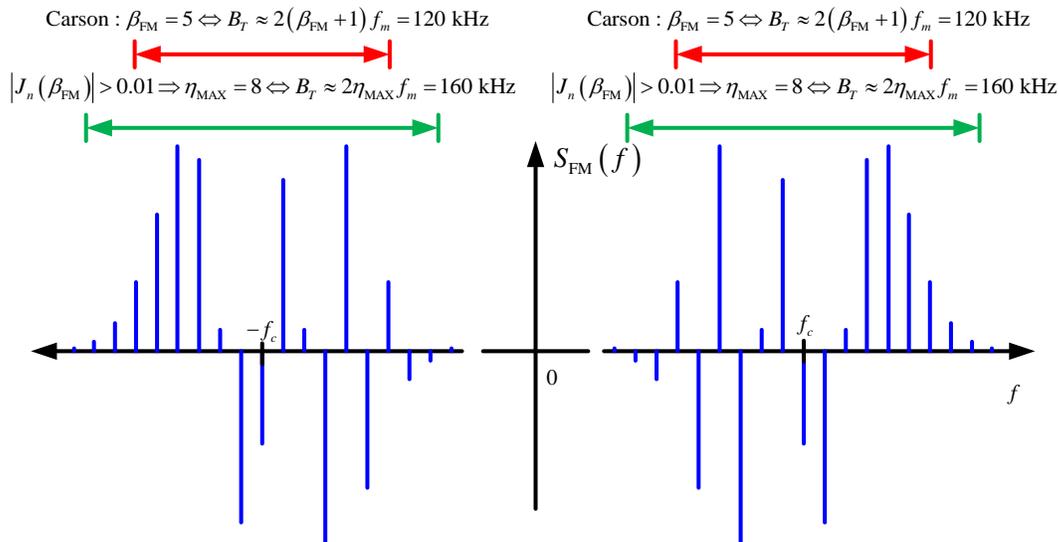


FIGURE 4.9: Spectre d'amplitude, $S_{FM}(f)$: $f_c = 10 \text{ MHz}$, $m(t) = \cos(2\pi f_m t)$ et $f_m = 10 \text{ kHz}$.

La densité spectrale de puissance $P_{FM}(f)$ pour ce troisième cas est :

$$P_{FM}(f) = \frac{A_c^2}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta_f) \{ \delta(f - f_c - n f_m) + \delta(f + f_c + n f_m) \}$$

4.7 Modulateurs FM et PM à large bande

Nous avons vu précédemment comment on pouvait produire des signaux modulés en phase ou en fréquence à bande étroite à l'aide d'un modulateur s'apparentant au modulateur AM conventionnel.

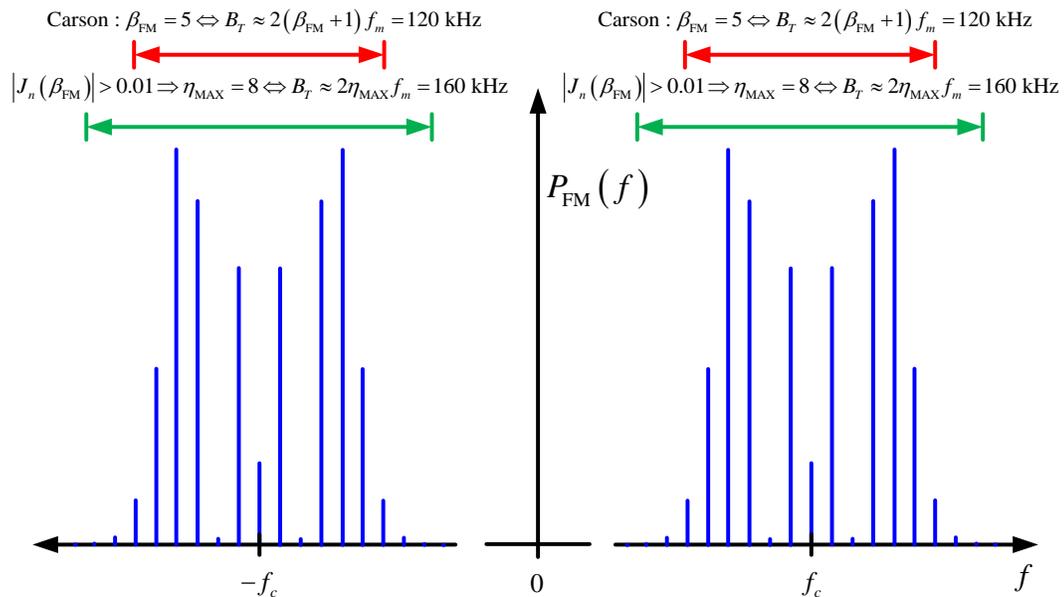


FIGURE 4.10: Densité spectrale de puissance, $P_{FM}(f)$: $f_c = 10 \text{ MHz}$, $m(t) = \cos(2\pi f_m t)$ et $f_m = 10 \text{ kHz}$.

4.7.1 Modulation à large bande indirecte

La figure 4.11 illustre comment on peut moduler un signal PM ou FM à large bande avec un multiplicateur de fréquence. Cette *méthode indirecte de modulation à large bande* est aussi appelée *méthode de Armstrong*, du nom de l'inventeur de la modulation de fréquence.

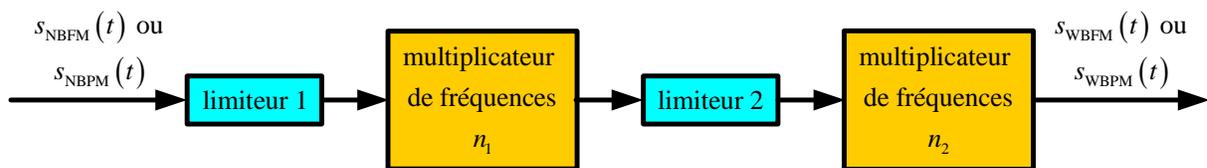


FIGURE 4.11: Modulateur de fréquence à large bande (méthode indirecte de Armstrong).

En modulation de fréquence, le signal à large bande $s_{WB FM}(t)$ sera de la forme :

$$s_{WB FM}(t) = A_c \cos \left[2\pi n f_c t + n k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right] \tag{4.61}$$

alors qu'en modulation de phase, $s_{WB PM}(t)$ sera :

$$s_{WB PM}(t) = A_c \cos [2\pi n f_c t + n k_p m(t)] \tag{4.62}$$

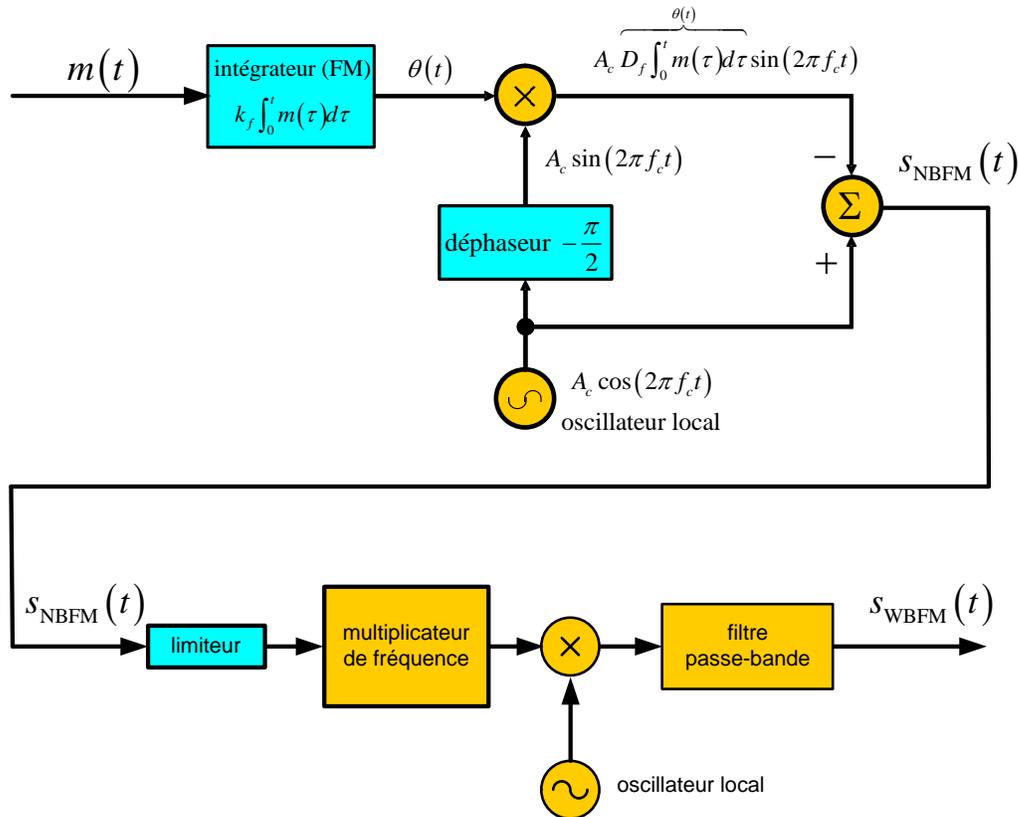


FIGURE 4.12: Modulateur FM à large bande (méthode indirecte).

Ici, le facteur de multiplication $n = n_1 n_2$. Ainsi, l'indice de modulation β_f (ou β_p) est multiplié par le facteur n , permettant de passer, en prenant n suffisamment grand, à la modulation à bande étroite à la modulation à large bande. Notez que la fréquence porteuse est maintenant $f'_c = n f_c$: on peut choisir f_c de façon à obtenir la fréquence porteuse désirée f'_c .

4.7.2 Multiplicateur de fréquence

Le multiplicateur de fréquence peut être réalisé, pour sa part, avec un dispositif non linéaire, comme un circuit de mise au carré ("square law device") :

$$v_{\text{sortie}} = a v_{\text{entrée}}^2 \quad (4.63)$$

Supposons qu'à l'entrée du dispositif non linéaire nous appliquons un signal modulé en fréquence à bande étroite et pour lequel le signal modulant est $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$. On sait que le signal FM à bande étroite est de la forme :

$$s_{NBFM}(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \beta_f \sin(2\pi f_m t)] \quad (4.64)$$

Si on applique $s_{NB FM}(t)$ à l'entrée du dispositif non linéaire, c'est-à-dire :

$$v_{\text{entrée}}(t) = A_c \cos [2\pi f_c t + \beta_f \sin(2\pi f_m t)] \quad (4.65)$$

On obtiendra à sa sortie :

$$\begin{aligned} v_{\text{sortie}}(t) &= a s_{NB FM}^2(t) & (4.66) \\ v_{\text{sortie}}(t) &= a \{A_c \cos [2\pi f_c t + \beta_f \sin(2\pi f_m t)]\}^2 \\ v_{\text{sortie}}(t) &= a A_c^2 \cos^2 [2\pi f_c t + \beta_f \sin(2\pi f_m t)] \\ v_{\text{sortie}}(t) &= \frac{a A_c^2}{2} \{1 + \cos 2 [2\pi f_c t + \beta_f \sin(2\pi f_m t)]\} \\ v_{\text{sortie}}(t) &= \underbrace{\frac{a A_c^2}{2}}_{\text{constante}} + \underbrace{\frac{a A_c^2}{2}}_{A'_c} \cos \left[\underbrace{4\pi f_c t}_{f'_c=2f_c} + \underbrace{2\beta_f \sin(2\pi f_m t)}_{\beta'_f=2\beta_f} \right] \end{aligned}$$

En filtrant la composante continue $\frac{a A_c^2}{2}$ à l'aide d'un filtre passe-haut, on obtient un nouveau signal pour lequel l'indice de modulation a aussi doublé :

$$v_{\text{filtré}}(t) = \frac{a A_c^2}{2} \cos [4\pi f_c t + 2\beta_f \sin(2\pi f_m t)] \quad (4.67)$$

Maintenant, en utilisant un dispositif non linéaire d'ordre n plutôt que 2, et en employant un filtre passe-bande centré autour de $f'_c = n f_c$ (et suffisamment large), le signal filtré sera de la forme :

$$v_{\text{filtré}}(t) = K \cos [2\pi n f_c t + n\beta_f \sin(2\pi f_m t)] \quad (4.68)$$

où K est une constante.

Considérons maintenant un signal modulé en angle à bande étroite $s_{NB}(t)$:

$$s_{NB}(t) = A_c \cos [2\pi f_c t + \theta(t)] \quad (4.69)$$

Si on applique ce signal à l'entrée d'un multiplicateur de fréquence d'ordre n , on aura à sa sortie un signal à large bande $s_{WB}(t)$ (selon la valeur de $|\theta(t)|$ et de n) :

$$s_{WB}(t) = K \cos [2\pi n f_c t + n\theta(t)] \quad (4.70)$$

où $n\theta(t) = n k_p m(t)$ en modulation de phase et $n\theta(t) = n k_f \int_0^t m(\tau) d\tau$ en modulation de fréquence.

Dans les deux cas, la largeur de bande du message $m(t)$ (W ou f_m selon cas) demeure la même alors que la déviation de fréquence Δf_{max} ou de phase $\Delta \theta_{\text{max}}$ a augmentée par un facteur n , ce qui se traduit par une augmentation de l'indice de modulation par ce facteur n .

$$\begin{aligned}
 \beta_{WB} &= n\beta_{NB} & (4.71) \\
 \beta_{WBFBM} &= n\beta_{NBFBM} & \text{(modulation de fréquence)} \\
 \beta_{WBFBM} &= n\beta_{NBFBM} & \text{(modulation de phase)}
 \end{aligned}$$

La fréquence porteuse f_c a aussi augmentée par n : $f_{cWB} = nf_{cNB}$

Cette nouvelle fréquence porteuse f_{cWB} peut cependant être ramenée à la fréquence porteuse originale, i.e. f_{cNB} , ou toute autre fréquence porteuse, en multipliant le signal à large de bande, $s_{WB}(t)$, par un signal de fréquence désirée produit par un oscillateur, et ce, sans changer l'indice de modulation à large bande.

4.7.3 Modulation à large bande directe

Il est également possible d'effectuer une *modulation à large bande directe* à l'aide d'un *oscillateur commandé en tension*, ou *convertisseur tension-fréquence*, (en anglais, VCO : Voltage Controlled Oscillator). Il s'agit d'un dispositif qui permet de faire varier la fréquence (instantanée) d'un oscillateur autour d'une fréquence porteuse de référence, et ce, en fonction de la tension appliquée à son entrée, à savoir le signal modulant $m(t)$.

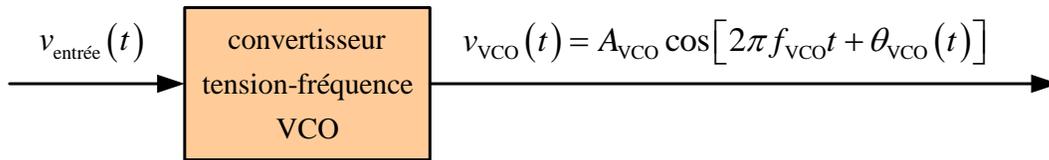


FIGURE 4.13: Convertisseur tension-fréquence VCO (Voltage Controlled Oscillator).

$$v_{VCO}(t) = A_{VCO} \cos [2\pi f_{VCO} t + \theta_{VCO}(t)] \quad (4.72)$$

avec $\theta_{VCO}(t) = K_{VCO} \int_0^t v_{\text{entrée}}(\tau) d\tau$.

4.8 Démodulation d'un signal FM : discriminateur balancé

La figure 4.14 montre les composantes d'un *discriminateur balancé* qui permet d'effectuer la démodulation d'un signal $s_{FM}(t)$ modulé en fréquence.

Le discriminateur balancé est constitué de deux branches, chacune comportant un filtre et un détecteur d'enveloppe.

Considérons un signal modulé en fréquence $s_{FM}(t)$:

$$s_{FM}(t) = A_c \cos \left[2\pi f_c t + k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right] \quad (4.73)$$

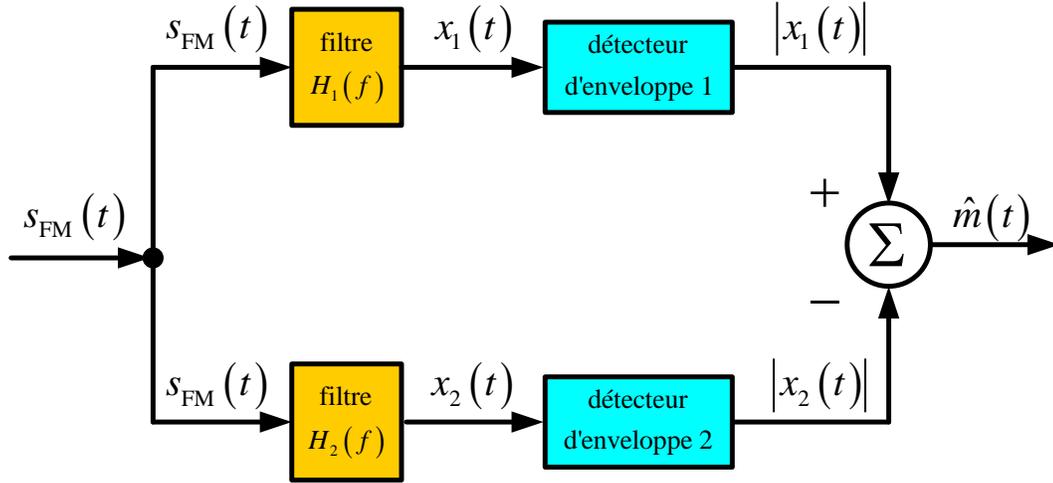


FIGURE 4.14: Discriminateur balancé.

Sa phase $\psi(t) = 2\pi f_c t + k_f \int_0^t m(\tau) d\tau$ et sa fréquence instantanée est $f_i(t) = f_c + \frac{k_f}{2\pi} m(t)$. Les deux filtres du discriminateur balancé ont des réponses en fréquence, $H_1(f)$ et $H_2(f)$, bien définies, tel que montré à la figure 4.15 :

$$H_1(f) = \begin{cases} j2\pi a \left[f + f_c - \frac{B_T}{2} \right], & \text{pour } -f_c - \frac{B_T}{2} \leq f \leq -f_c + \frac{B_T}{2} \\ j2\pi a \left[f - f_c + \frac{B_T}{2} \right], & \text{pour } f_c - \frac{B_T}{2} \leq f \leq f_c + \frac{B_T}{2} \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (4.74)$$

$$H_2(f) = \begin{cases} -j2\pi a \left[f + f_c + \frac{B_T}{2} \right], & \text{pour } -f_c - \frac{B_T}{2} \leq f \leq -f_c + \frac{B_T}{2} \\ -j2\pi a \left[f - f_c - \frac{B_T}{2} \right], & \text{pour } f_c - \frac{B_T}{2} \leq f \leq f_c + \frac{B_T}{2} \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (4.75)$$

Ici, B_T est la largeur de bande effective de transmission du signal $s_{FM}(t)$.

On remarque que la fonction de transfert du filtre, $H_1(f)$, varie linéairement en fonction de la fréquence dans les intervalles $-f_c - \frac{B_T}{2} \leq f \leq -f_c + \frac{B_T}{2}$ et $f_c - \frac{B_T}{2} \leq f \leq f_c + \frac{B_T}{2}$, et ce avec une pente de $2\pi a$. Il en est de même pour le second filtre $H_2(f)$ mais cette fois-ci avec une pente de $-2\pi a$.

Pour bien voir l'effet de ces filtres sur le signal reçu $s_{FM}(t)$, on peut utiliser la représentation complexe en bande de base de ceux-ci, soit $\tilde{H}_1(f)$ et $\tilde{H}_2(f)$ (figure 4.16), ainsi que des signaux à l'entrée et à la sortie des filtres : $\tilde{S}_{FM}(f)$, $\tilde{X}_1(f)$ et $\tilde{X}_2(f)$:

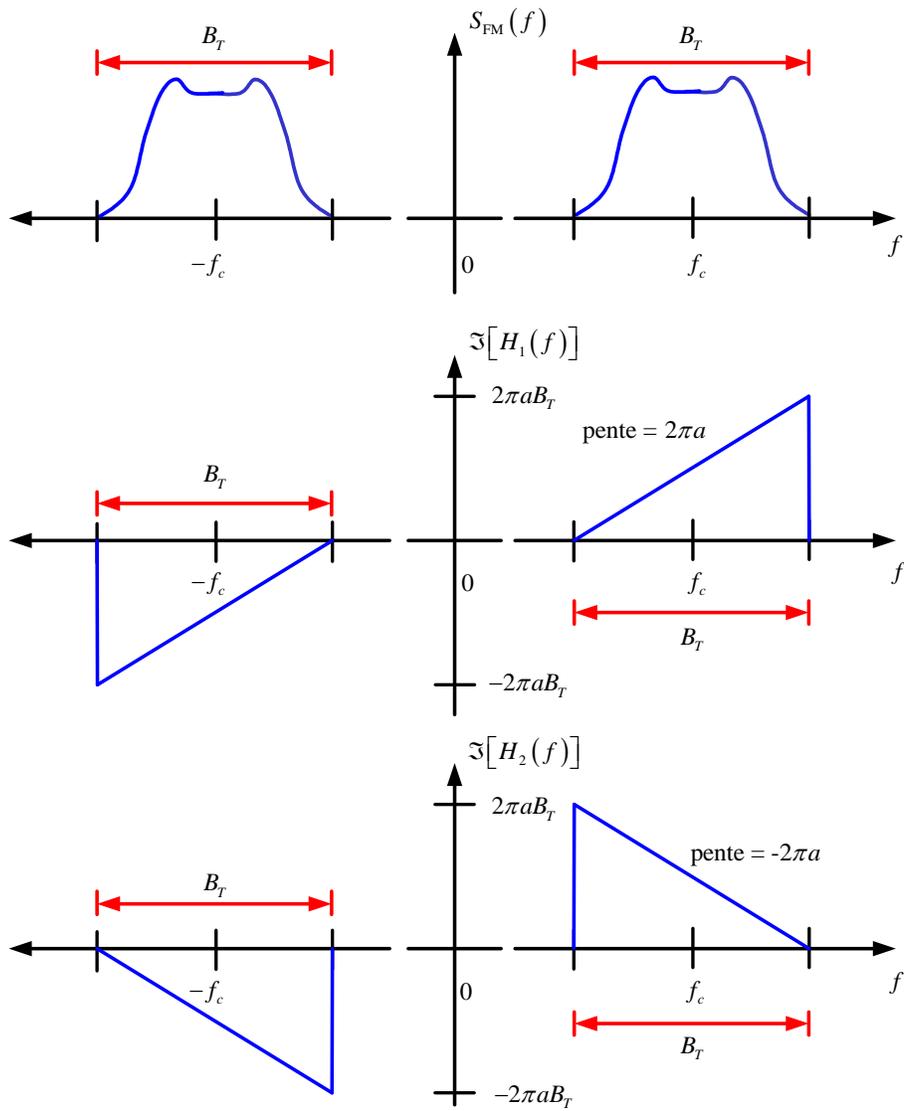


FIGURE 4.15: Réponse en fréquence des deux filtres du discriminateur balancé en bande passante.

Pour le premier filtre, on a $\tilde{H}_1(f - f_c) = 2H_1(f)$, pour $f > 0$, c'est-à-dire :

$$\tilde{H}_1(f) = \begin{cases} j4\pi a \left[f + \frac{B_T}{2} \right], & \text{pour } -\frac{B_T}{2} \leq f \leq \frac{B_T}{2} \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (4.76)$$

alors que pour le second filtre, $\tilde{H}_2(f - f_c) = 2H_2(f)$, pour $f > 0$:

$$\tilde{H}_2(f) = \begin{cases} -j4\pi a \left[f - \frac{B_T}{2} \right], & \text{pour } -\frac{B_T}{2} \leq f \leq \frac{B_T}{2} \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (4.77)$$

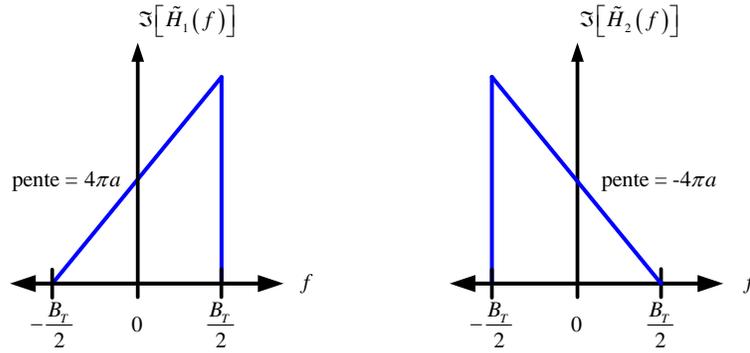


FIGURE 4.16: Réponse en fréquence des deux filtres du discriminateur balancé : représentation complexe en bande de base en bande passante.

Quant au signal reçu $s_{FM}(t)$, celui-ci s'exprime dans sa représentation complexe en bande de base par $\tilde{s}_{FM}(t)$:

$$\tilde{s}_{FM}(t) = A_c \exp \left\{ j \left[k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right] \right\} \quad (4.78)$$

dans le temps. On peut aussi donner le spectre de sa représentation complexe en bande de base, $\tilde{S}_{FM}(f) = \mathcal{F}[\tilde{s}_{FM}(t)]$:

$$\tilde{S}_{FM}(f) = A_c \delta \left[f - \frac{k_f}{2\pi t} \int_0^t m(\tau) d\tau \right] \quad (4.79)$$

À la sortie du filtre 1 (branche du haut), on obtient le signal $\tilde{X}_1(f)$ (spectre en représentation complexe en bande de base) :

$$\tilde{X}_1(f) = \mathcal{F}[\tilde{x}_1(t)] = \mathcal{F}[\tilde{s}_{FM}(t) * \tilde{h}_1(t)] = \tilde{S}_{FM}(f) \frac{\tilde{H}_1(f)}{2} \quad (4.80)$$

De même, à la sortie du filtre 2 (branche du bas), on a :

$$\tilde{X}_2(f) = \mathcal{F}[\tilde{x}_2(t)] = \mathcal{F}[\tilde{s}_{FM}(t) * \tilde{h}_2(t)] = \tilde{S}_{FM}(f) \frac{\tilde{H}_2(f)}{2} \quad (4.81)$$

En remplaçant $\tilde{H}_1(f)$ par $j4\pi a \left[f + \frac{B_T}{2} \right]$ et $\tilde{S}_{FM}(f)$ par $A_c \delta \left[f - \frac{k_f}{2\pi t} \int_0^t m(\tau) d\tau \right]$, la sortie du filtre 1 devient :

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1(f) &= \tilde{S}_{FM}(f) \frac{\tilde{H}_1(f)}{2} & (4.82) \\ \tilde{X}_1(f) &= A_c \delta \left[f - \frac{k_f}{2\pi t} \int_0^t m(\tau) d\tau \right] \frac{1}{2} j4\pi a \left[f + \frac{B_T}{2} \right] \\ \tilde{X}_1(f) &= A_c \delta \left[f - \frac{k_f}{2\pi t} \int_0^t m(\tau) d\tau \right] j2\pi a f + A_c \delta \left[f - \frac{k_f}{2\pi t} \int_0^t m(\tau) d\tau \right] j2\pi a \frac{B_T}{2} \\ \tilde{X}_1(f) &= A_c a (j2\pi f) \delta \left[f - \frac{k_f}{2\pi t} \int_0^t m(\tau) d\tau \right] + jA_c \pi a B_T \delta \left[f - \frac{k_f}{2\pi t} \int_0^t m(\tau) d\tau \right] \end{aligned}$$

En revenant dans le domaine du temps avec $\tilde{x}_1(t) = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{X}_1(f)]$,

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}_1(t) &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ A_c a (j2\pi f) \delta \left[f - \frac{k_f}{2\pi t} \int_0^t m(\tau) d\tau \right] + j A_c \pi a B_T \delta \left[f - \frac{k_f}{2\pi t} \int_0^t m(\tau) d\tau \right] \right\} \\
 \tilde{x}_1(t) &= A_c a \mathcal{F}^{-1} \left\{ (j2\pi f) \delta \left[f - \frac{k_f}{2\pi t} \int_0^t m(\tau) d\tau \right] \right\} + j A_c \pi a B_T \mathcal{F}^{-1} \left\{ \delta \left[f - \frac{k_f}{2\pi t} \int_0^t m(\tau) d\tau \right] \right\} \\
 \tilde{x}_1(t) &= A_c a \frac{d}{dt} \left(\mathcal{F}^{-1} \left\{ \delta \left[f - \frac{k_f}{2\pi t} \int_0^t m(\tau) d\tau \right] \right\} \right) + j A_c \pi a B_T \mathcal{F}^{-1} \left\{ \delta \left[f - \frac{k_f}{2\pi t} \int_0^t m(\tau) d\tau \right] \right\} \\
 \tilde{x}_1(t) &= A_c a \frac{d}{dt} \left\{ \exp \left[j k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right] \right\} + j A_c \pi a B_T \exp \left[j k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right] \\
 \tilde{x}_1(t) &= A_c a \exp \left[j k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right] \frac{d}{dt} \left[j k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right] + j A_c \pi a B_T \exp \left[j k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right] \\
 \tilde{x}_1(t) &= A_c a j k_f m(t) \exp \left[j k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right] + j A_c \pi a B_T \exp \left[j k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right]
 \end{aligned} \tag{4.83}$$

En regroupant les termes :

$$\tilde{x}_1(t) = j A_c a B_T \pi \left[1 + \frac{k_f}{\pi B_T} m(t) \right] \exp \left[j k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right] \tag{4.84}$$

On peut revenir à la représentation habituelle du signal en bande passante à la sortie du filtre 1 :

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= \Re \{ \tilde{x}_1(t) \exp(j2\pi f_c t) \} \\
 x_1(t) &= \Re \left\{ j A_c a B_T \pi \left[1 + \frac{k_f}{\pi B_T} m(t) \right] \exp \left[j k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right] \exp(j2\pi f_c t) \right\} \\
 x_1(t) &= A_c a B_T \pi \left[1 + \frac{k_f}{\pi B_T} m(t) \right] \Re \left\{ j \exp \left[j k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right] \exp(j2\pi f_c t) \right\} \\
 x_1(t) &= A_c a B_T \pi \left[1 + \frac{k_f}{\pi B_T} m(t) \right] \Re \left\{ \exp \left(j \frac{\pi}{2} \right) \exp \left[j k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right] \exp(j2\pi f_c t) \right\}
 \end{aligned} \tag{4.85}$$

car $j = \exp(j\frac{\pi}{2})$. Donc finalement, on obtient :

$$\boxed{ x_1(t) = A_c a B_T \pi \underbrace{\left[1 + \frac{k_f}{\pi B_T} m(t) \right]}_{\text{modulation d'amplitude}} \underbrace{\cos \left[2\pi f_c t + k_f \int_0^t m(\tau) d\tau + \frac{\pi}{2} \right]}_{\text{modulation d'angle}} } \tag{4.86}$$

Le signal $x_1(t)$ à la sortie du filtre est donc modulé en amplitude et en fréquence autour de la fréquence porteuse originale f_c . Si le terme $-1 \leq \left[1 + \frac{k_f}{\pi B_T} m(t) \right] \leq 1$, alors on peut utiliser un détecteur d'enveloppe pour suivre la modulation d'amplitude pour démoduler le signal tout comme on le faisait en modulation AM conventionnelle.

À la sortie du détecteur d'enveloppe on obtient le signal $|x_1(t)|$:

$$|x_1(t)| = A_c a B_T \pi \left[1 + \frac{k_f}{\pi B_T} m(t) \right] \tag{4.87}$$

et la sortie du second détecteur d'enveloppe dans la branche du bas du discriminateur $|x_2(t)|$ s'obtient de la même manière :

$$|x_2(t)| = A_c a B_T \pi \left[1 - \frac{k_f}{\pi B_T} m(t) \right] \quad (4.88)$$

À la sortie du sommateur, on obtient finalement le signal désiré, à savoir $\hat{m}(t)$:

$$\hat{m}(t) = |x_1(t)| - |x_2(t)| \quad (4.89)$$

$$\hat{m}(t) = A_c a B_T \pi \left[1 + \frac{k_f}{\pi B_T} m(t) \right] - A_c a B_T \pi \left[1 - \frac{k_f}{\pi B_T} m(t) \right]$$

$$\boxed{\hat{m}(t) = 2A_c a k_f m(t)} \quad (4.90)$$

Le signal à la sortie du discriminateur balancé, $\hat{m}(t)$, est proportionnel au message original $m(t)$: on démodule donc correctement le signal transmis.

On peut remarquer les imprécisions suivantes d'un discriminateur balancé réel :

1. Le signal modulé en fréquence, $s_{FM}(t)$, a des composantes spectrales à l'extérieur de sa largeur de bande effective de transmission, B_T .
2. L'imperfection des filtres non idéaux.
3. Caractéristiques non linéaires sur toute la largeur de bande B_T .

4.9 Démodulation d'un signal FM : boucle à asservissement de phase

La figure 4.17 montre le schéma d'un démodulateur FM utilisant le principe de boucle à asservissement de phase (PLL : "Phase-Locked Loop").

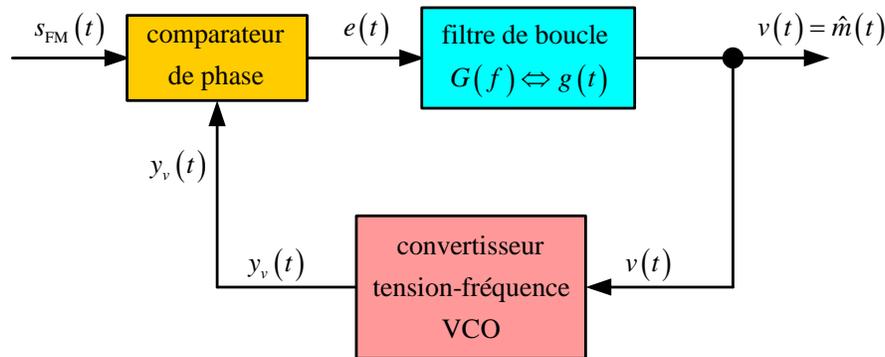


FIGURE 4.17: Démodulateur FM utilisant une boucle à asservissement de phase.

Le signal modulé en fréquence est de la forme :

$$s_{FM}(t) = A_c \cos [2\pi f_c t + \theta(t)] \quad (4.91)$$

où $\theta(t) = k_f \int_0^t m(\tau) d\tau$.

Le convertisseur tension-fréquence (VCO : “Voltage Controlled Oscillator”) produit un signal $y_v(t)$ dont la fréquence instantanée, $f_v(t)$ varie en fonction du temps et est déterminée par la tension $v(t)$ à l’entrée de ce VCO :

$$f_v(t) = f_c + k_v v(t) \quad (4.92)$$

où $f_v(t)$ est la fréquence de sortie du VCO, f_c la fréquence *nomiale* de la porteuse, k_v une constante de proportionnalité et $v(t)$ le signal à l’entrée du VCO. On peut exprimer le signal $y_v(t)$ à la sortie du VCO par :

$$y_v(t) = A_v \sin [2\pi f_c t + \theta_v(t)] \quad (4.93)$$

où $\theta_v(t) = k_v \int_0^t v(\tau) d\tau$.

Le comparateur de phase est constitué d’un multiplicateur suivi d’un filtre passe-bas (figure 4.18).

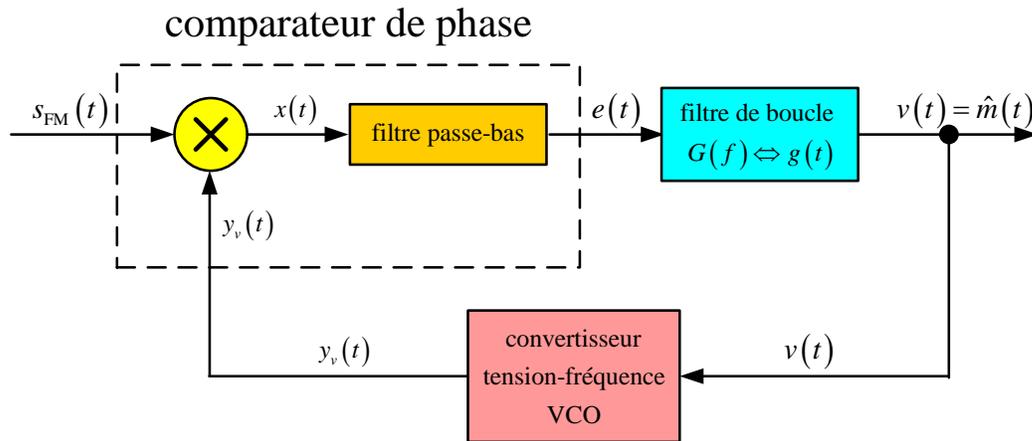


FIGURE 4.18: Démodulateur FM à boucle à asservissement de phase : comparateur de phase.

Le signal à la sortie du multiplicateur, $f(t)$, est :

$$f(t) = s_{FM}(t)y_v(t) \quad (4.94)$$

$$f(t) = A_c \cos [2\pi f_c t + \theta(t)] A_v \sin [2\pi f_c t + \theta_v(t)] \quad (4.95)$$

$$f(t) = A_c A_v \cos [2\pi f_c t + \theta(t)] \sin [2\pi f_c t + \theta_v(t)] \quad (4.96)$$

En utilisant la relation trigonométrique $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\beta - \alpha)]$ avec $\alpha = 2\pi f_c t + \theta(t)$ et $\beta = 2\pi f_c t + \theta_v(t)$, on obtient :

$$f(t) = \frac{A_c A_v}{2} \sin [4\pi f_c t + \theta(t) + \theta_v(t)] + \frac{A_c A_v}{2} \sin [\theta(t) - \theta_v(t)] \quad (4.97)$$

4.9. DÉMODULATION D'UN SIGNAL FM : BOUCLE À ASSERVISSEMENT DE PHASE 105

Le rôle du filtre passe-bas est d'éliminer la composante de $f(t)$ autour de $2f_c$. La sortie du filtre, $e(t)$, c'est-à-dire le signal d'erreur, est donné par :

$$e(t) = \frac{A_c A_v}{2} \sin[\theta(t) - \theta_v(t)] \quad (4.98)$$

$$e(t) = \frac{A_c A_v}{2} \sin(\theta_e(t)) \quad (4.99)$$

où $\theta_e(t) \triangleq \theta(t) - \theta_v(t)$. Si la boucle à asservissement de phase est *verrouillée* sur le signal d'entrée, et si l'on suppose que $\frac{A_c A_v}{2} = 1$, alors :

$$e(t) = \sin(\theta_e(t)) \approx \theta_e(t) \quad (4.100)$$

si en verrouillage de phase, l'erreur de phase, $\theta_e(t)$, est supposée petite.

On peut alors représenter la boucle à asservissement de phase par le schéma suivant (en verrouillage de phase) :

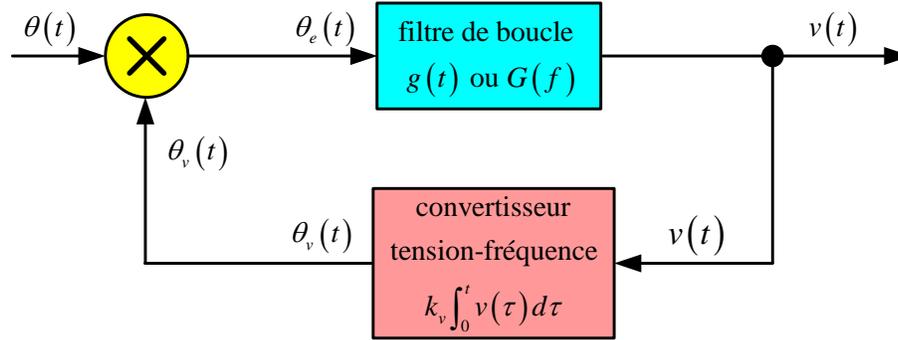


FIGURE 4.19: Boucle à asservissement de phase (en verrouillage de phase).

Donc, en supposant le système verrouillé en phase et d'erreur de phase petite :

$$e(t) \approx \theta_e(t) = \theta(t) - \theta_v(t) \quad (4.101)$$

En prenant la dérivée temporelle de $\theta_e(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\theta_e(t)] &= \frac{d}{dt} [\theta(t) - \theta_v(t)] \\ \frac{d}{dt} [\theta_e(t)] &= \frac{d}{dt} [\theta(t)] - \frac{d}{dt} [\theta_v(t)] \\ \frac{d}{dt} [\theta_e(t)] &= \frac{d}{dt} [\theta(t)] - \frac{d}{dt} \left[k_v \int_0^t v(\tau) d\tau \right] \\ \frac{d}{dt} [\theta_e(t)] &= \frac{d}{dt} [\theta(t)] - k_v \frac{d}{dt} \left[\int_0^t v(\tau) d\tau \right] \\ \frac{d}{dt} [\theta_e(t)] &= \frac{d}{dt} [\theta(t)] - k_v v(t) \end{aligned} \quad (4.102)$$

Or la tension $v(t)$ à la sortie du filtre de boucle est :

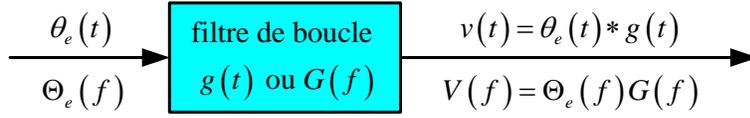


FIGURE 4.20: Filtre de boucle.

$$v(t) = \theta_e(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta_e(\tau)g(t - \tau) d\tau \quad (4.103)$$

Donc,

$$\frac{d}{dt} [\theta_e(t)] = \frac{d}{dt} [\theta(t)] - k_v v(t) \quad (4.104)$$

Il s'ensuit :

$$\boxed{\frac{d}{dt} [\theta_e(t)] = \frac{d}{dt} [\theta(t)] - k_v \int_{-\infty}^{\infty} \theta_e(\tau)g(t - \tau) d\tau} \quad (4.105)$$

Dans le domaine des fréquences, en prenant la transformée de Fourier à gauche et à droite de l'égalité :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left[\frac{d}{dt} [\theta_e(t)] \right] &= (j2\pi f) \mathcal{F} [\theta_e(t)] = (j2\pi f) \Theta_e(f), \quad (4.106) \\ \mathcal{F} \left[\frac{d}{dt} [\theta(t)] \right] &= (j2\pi f) \mathcal{F} [\theta(t)] = (j2\pi f) \Theta(f), \text{ et} \\ \mathcal{F} \left[-k_v \int_{-\infty}^{\infty} \theta_e(\tau)g(t - \tau) d\tau \right] &= -k_v \Theta_e(f)G(f) \end{aligned}$$

On peut donc réécrire :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\theta_e(t)] &= \frac{d}{dt} [\theta(t)] - k_v v(t) \quad (4.107) \\ (j2\pi f) \Theta_e(f) &= (j2\pi f) \Theta(f) - k_v \Theta_e(f)G(f) \end{aligned}$$

En réarrangeant les termes :

$$\begin{aligned} \Theta_e(f) &= \Theta(f) - \frac{k_v}{j2\pi f} \Theta_e(f)G(f) \quad (4.108) \\ \Theta_e(f) \left[1 + \frac{k_v}{j2\pi f} G(f) \right] &= \Theta(f) \\ \Theta_e(f) &= \frac{\Theta(f)}{1 + \frac{k_v}{j2\pi f} G(f)} \end{aligned}$$

La sortie du filtre de boucle est donnée par :

$$v(t) = \theta_e(t) * g(t) \quad (4.109)$$

ou encore,

$$V(f) = \Theta_e(f)G(f) = \frac{\Theta(f)G(f)}{1 + \frac{k_v}{j2\pi f}G(f)} \quad (4.110)$$

Si on choisit une valeur de k_v au VCO suffisamment élevée, dans la plage de fréquences d'intérêt, i.e., $-W \leq f \leq W$, de telle sorte que $\left| \frac{k_v G(f)}{j2\pi f} \right| \gg 1$, alors la sortie du filtre de boucle $V(f)$ sera approximativement égale à :

$$V(f) = \frac{\Theta(f)G(f)}{1 + \frac{k_v}{j2\pi f}G(f)} \approx \frac{\Theta(f)G(f)}{\frac{k_v}{j2\pi f}G(f)} = j \frac{2\pi f}{k_v} \Theta(f) \quad (4.111)$$

En revenant dans le domaine temporel, on a :

$$\begin{aligned} v(t) &= \mathcal{F}^{-1}[V(f)] \approx \mathcal{F}^{-1}\left[j \frac{2\pi f}{k_v} \Theta(f)\right] = \mathcal{F}^{-1}\left[\left(\frac{1}{k_v}\right) (j2\pi f) \Theta(f)\right] \\ v(t) &\approx \left(\frac{1}{k_v}\right) \frac{d}{dt} \mathcal{F}^{-1}[\Theta(f)] = \left(\frac{1}{k_v}\right) \frac{d}{dt} [\theta(t)] \\ v(t) &\approx \left(\frac{1}{k_v}\right) \frac{d}{dt} \left[k_f \int_0^t m(\tau) d\tau\right] = \left(\frac{1}{k_v}\right) k_f m(t) \end{aligned} \quad (4.112)$$

On obtient donc à la sortie du démodulateur (boucle à asservissement de phase) un signal $v(t)$ de la forme :

$$\boxed{v(t) \approx \left(\frac{k_f}{k_v}\right) m(t)} \quad (4.113)$$

Le signal $v(t)$ à la sortie du démodulateur à boucle à asservissement de phase est donc proportionnelle au message $m(t)$ qui a été modulée en fréquence au transmetteur.

4.10 Préaccentuateurs et désaccentuateurs

L'utilisation d'un discriminateur dans un récepteur FM a pour effet d'accroître la densité spectrale de puissance du bruit aux fréquences plus élevées du signal. La figure 4.21 montre l'allure typique de la densité spectrale de puissance d'un message typique ainsi que la densité spectrale de puissance de bruit à la sortie d'un tel discriminateur.

La figure 4.22 montre un système de transmission FM avec un filtre de préaccentuation, $H_{\text{pré}}(f)$, au transmetteur. Le signal à moduler est appliqué à l'entrée de ce filtre avant d'être modulé en fréquence, puis transmis dans le canal bruité. À la réception, le signal reçu (avec du bruit) est démodulé, puis appliqué à un filtre de désaccentuation, $H_{\text{dés}}(f)$, afin de réduire l'effet du bruit aux fréquences plus élevées du signal démodulé. Le signal transmis est donc appliqué aux filtres $H_{\text{pré}}(f)$ et

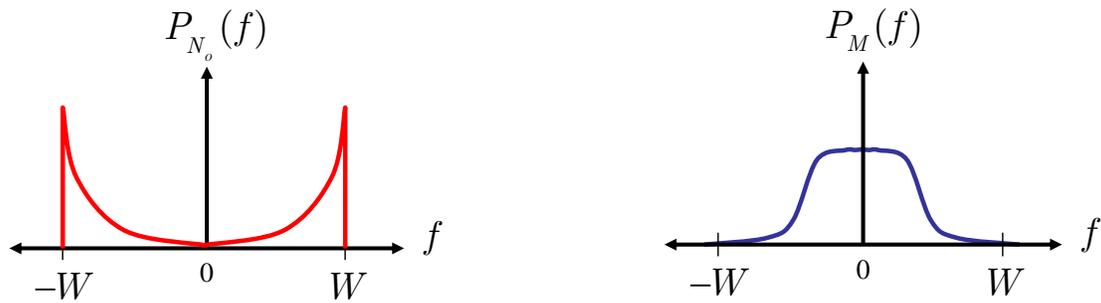
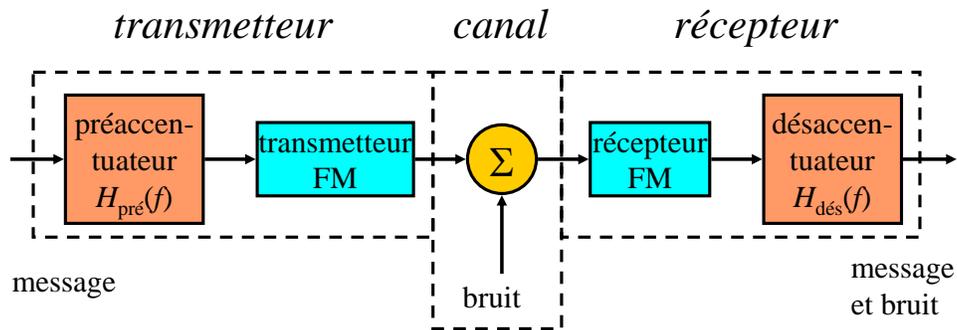


FIGURE 4.21: Densité spectrale de puissance typique d'un signal (gauche) et densité spectrale de la puissance du bruit à la sortie d'un discriminateur (droite).



$H_{\text{pré}}(f)$: filtre de préaccentuation

$H_{\text{dés}}(f)$: filtre de désaccentuation

$$H_{\text{dés}}(f) = \frac{1}{H_{\text{pré}}(f)} \quad (\text{dans la plage de fréquences : } -W \leq f \leq W)$$

FIGURE 4.22: Filtre de préaccentuation, $H_{\text{pré}}(f)$, au transmetteur et filtre de désaccentuation, $H_{\text{dés}}(f)$, au récepteur

$H_{\text{dés}}(f)$ et est donc reconstitué correctement à la sortie du filtre de désaccentuation alors que le bruit est réduit par le filtre de désaccentuation :

$$H_{\text{dés}}(f) = \frac{1}{H_{\text{pré}}(f)} \quad , \quad -B \leq f \leq B \quad (4.114)$$

La densité spectrale de puissance du bruit à la sortie du filtre de désaccentuation

est donnée par :

$$|H_{\text{dés}}(f)|^2 P_{N_d}(f) = \begin{cases} \frac{N_0 f^2}{A_c^2} |H_{\text{dés}}(f)|^2, & -\frac{B_T}{2} \leq f \leq \frac{B_T}{2} \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.115)$$

La puissance du bruit à la sortie du filtre de désaccentuation (avec filtre de post-détection) est :

$$P_{o_{\text{dés}}} = \frac{N_0}{A_c^2} \int_{-B}^B f^2 |H_{\text{dés}}(f)|^2 df \quad (4.116)$$

4.11 Systèmes de transmission FM

Il existe plusieurs systèmes de transmission utilisant la modulation de fréquence.

La radiodiffusion stéréophonique FM module un signal audio de largeur de bande du message de 15 kHz en modulation monophonique (mono) et de 53 kHz en stéréophonie (stereo). La déviation maximale de fréquence est de 75 kHz.

La modulation FM est employée également pour la radio mobile analogique bidirectionnelle. Ici, la largeur de bande du message est de 5 kHz et la déviation maximale de fréquence est aussi de 5 kHz.

Un autre exemple d'utilisation de la modulation FM est la modulation de la composante audio d'un signal de télévision analogique NTSC (lui-même modulé en modulation VSB (modulation d'amplitude à bande résiduelle)). La largeur de bande du message audion est de 15 kHz et sa déviation maximale de fréquence est de 25 kHz.

4.11.1 Radiodiffusion monophonique FM

La figure 4.23 montre le spectre $M(f)\mathcal{F}[m(t)]$ d'un signal $m(t)$. La largeur de bande du signal est $W = 15$ kHz, sa déviation maximale de fréquence $\Delta f_{\text{max}} = 75$ kHz et son indice de modulation FM est :

$$\beta_f = \frac{\Delta f_{\text{max}}}{W} = \frac{75 \text{ kHz}}{15 \text{ kHz}} = 5$$

Il s'agit donc de modulation de fréquence à large bande.

Multiplexage fréquentiel en radiodiffusion FM

La bande de fréquences réservée à la radiodiffusion FM est :

$$[88 \text{ MHz} \leq f \leq 108 \text{ MHz}]$$

La largeur de bande allouée à un canal est de 200 kHz et la fréquence intermédiaire est 10.7 MHz.

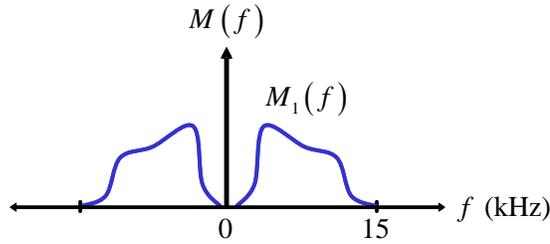


FIGURE 4.23: Spectre d'un signal en monophonie FM.

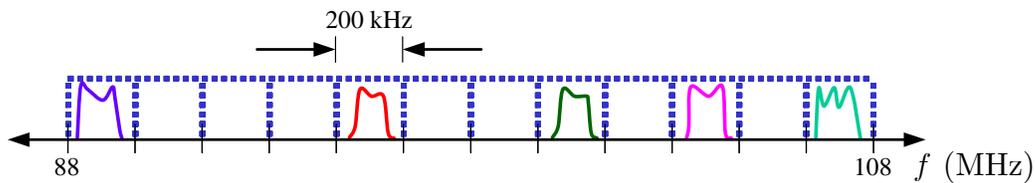


FIGURE 4.24: Multiplexage fréquentiel en radiodiffusion FM.

Récepteur superhétérodyne FM

La figure 4.25 montre un récepteur superhétérodyne FM constitué d'un démodulateur monophonique FM (figure 4.26).

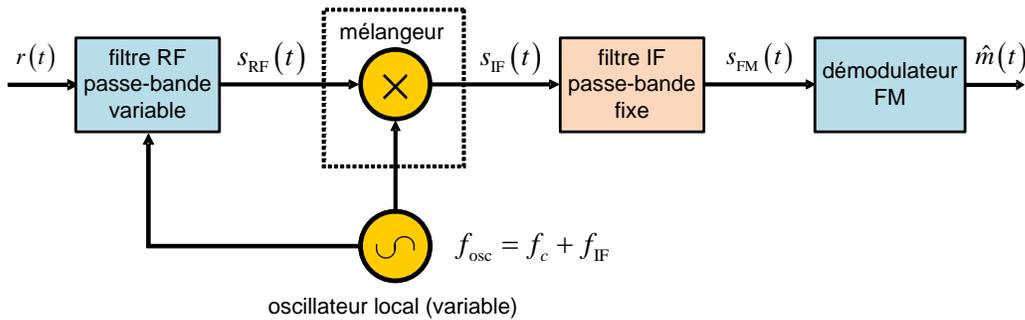


FIGURE 4.25: Récepteur superhétérodyne FM.



FIGURE 4.26: Démodulateur monophonique FM.

À la sortie du mélangeur, on obtient le signal $s_{IF}(t)$ de fréquence intermédiaire :

$$\begin{aligned} s_{IF}(t) &= s_{RF}(t) \cos(2\pi f_{osc}t) \\ s_{IF}(t) &= s_{RF}(t) \cos(2\pi f_c t + 2\pi f_{IF}t) \end{aligned}$$

Après filtrage avec le filtre passe-bande fixé à la fréquence intermédiaire f_{IF} , on obtient le signal à démoduler :

$$s_{FM}(t) = \frac{A_c}{2} \cos \left[2\pi f_{IF}t + k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right]$$

En radiodiffusion FM (conventionnelle), la porteuse RF se situe dans la plage de fréquences :

$$f_{c_{min}} = 88.1 \text{ MHz} \leq f_c \leq f_{c_{max}} = 107.9 \text{ MHz}$$

La fréquence intermédiaire est de 10.7 MHz et la fréquence de l'oscillateur local permet de ramener le signal RF à la fréquence intermédiaire :

$$\begin{aligned} f_{c_{min}} + f_{IF} &\leq f_{osc} \leq f_{c_{max}} + f_{IF} \\ (88.1 + 10.7) \text{ MHz} &\leq f_{osc} \leq (107.9 + 10.7) \text{ MHz} \\ 98.8 \text{ MHz} &\leq f_{osc} \leq 118.6 \text{ MHz} \end{aligned}$$

4.11.2 Radiodiffusion stéréophonique FM

On désire transmettre sur des canaux de radiodiffusion, utilisant la modulation de fréquence, des signaux stéréophoniques.

Il s'agit en fait de transmettre deux signaux, $m_g(t)$ et $m_d(t)$, représentant respectivement les signaux à gauche et à droite de l'*image stéréophonique* (par exemple, les signaux provenant de 2 microphones dirigés l'un à gauche et l'autre à droite).

Les signaux $m_g(t)$ et $m_d(t)$ sont limités en fréquence à une largeur de bande $W = 15$ kHz chacun. On doit pouvoir combiner ces signaux en les multiplexant.

À la réception, on doit pouvoir récupérer ces deux signaux $m_g(t)$ et $m_d(t)$ séparément de façon à pouvoir reconstruire le signal stéréophonique. De plus, on doit pouvoir reproduire le signal reçu avec un récepteur monophonique (i.e. canal unique gauche et droite).

Multiplexage stéréophonique FM

La figure ci-après montre comment on peut combiner les deux signaux gauche et droit, $m_g(t)$ et $m_d(t)$, afin de produire un signal monophonique, $m_1(t)$:

$$m_1(t) = m_g(t) + m_d(t) \tag{4.117}$$

C'est ce signal, $m_1(t)$, qui pourra être démodulé par les équipements monophoniques. De plus, le système produit un second signal, $m_2(t)$, qui sera utilisé par les récepteurs

stéréophoniques avec $m_1(t)$ afin de restituer les signaux originaux gauche $m_g(t)$ et droit $m_d(t)$:

$$m_2(t) = m_g(t) - m_d(t) \quad (4.118)$$

Ainsi, à la sortie des deux circuits de sommation, nous obtenons la somme des signaux gauche et droit :

$$m_1(t) = m_g(t) + m_d(t) \quad (4.119)$$

ainsi que la différence des canaux gauche et droit :

$$m_2(t) = m_g(t) - m_d(t) \quad (4.120)$$

Le spectre $M(f)$ du signal résultant $m(t)$ s'exprime, en faisant abstraction des circuits de préaccentuation (figure 4.27) :

$$\begin{aligned} M(f) &= \mathcal{F}[m(t)] = \mathcal{F}[m_1(t) + c_1(t) + [m_2(t)c_2(t)]] \\ M(f) &= M_1(f) + C_1(f) + [M_2(f) * C_2(f)] \end{aligned} \quad (4.121)$$

où les porteuses $c_1(t)$ et $c_2(t)$ sont : $c_1(t) = \cos(2\pi f_{c_1}t)$ avec $f_{c_1} = 19$ kHz et $c_2(t) = \cos(2\pi f_{c_2}t)$ où $f_{c_2} = 38$ kHz.

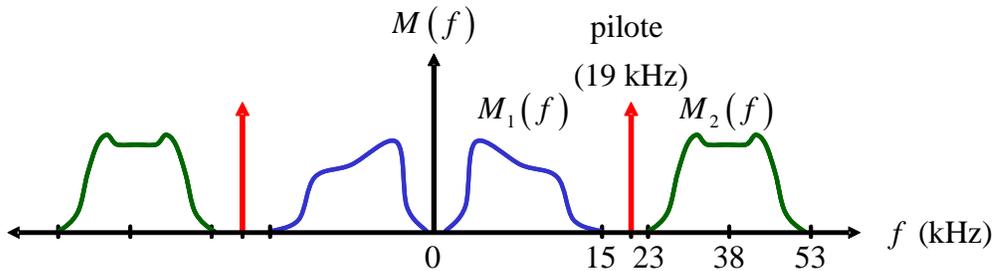


FIGURE 4.27: Spectre d'un signal multiplexé pour la stéréophonie FM.

Le signal stéréophonique est alors modulé en fréquence et transmis dans le canal radioélectrique :

$$s_{FM}(t) = A_c \cos \left[2\pi f_c t + k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right] \quad (4.122)$$

Démultiplexage stéréophonique FM

À la réception, le signal stéréophonique FM est alors détecté et démodulé avec (par exemple) un récepteur superhétérodyne. La figure 4.28 montre l'étage IF (où $f_{IF} = 10.7$ MHz) d'un récepteur monophonique.

Pour une réception stéréophonique du signal reçu, modulé en fréquence, $s_{FM}(t)$, on doit utiliser le système de démultiplexage suivant, afin de pouvoir récupérer les composantes gauche $m_g(t)$ et droite $m_d(t)$ du signal original (figure 4.29).

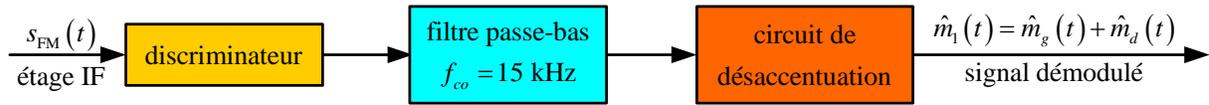


FIGURE 4.28: Récepteur monophonique FM.

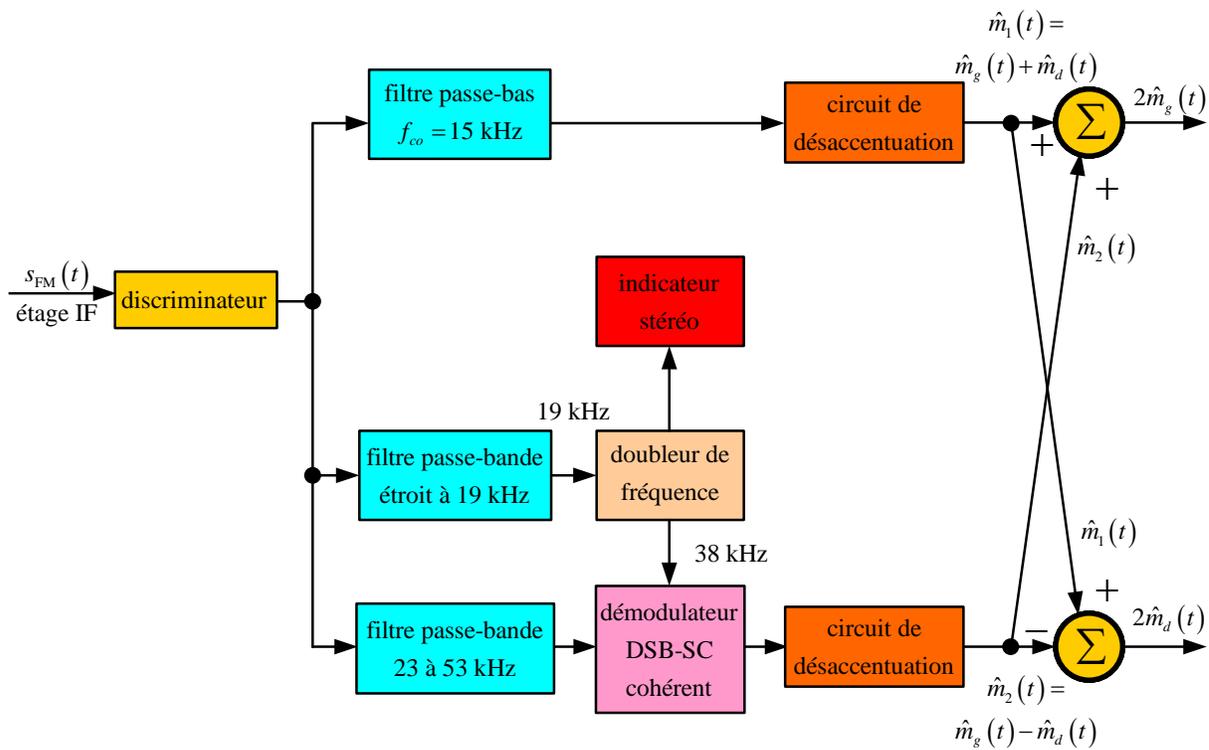


FIGURE 4.29: Récepteur stéréophonique FM.

