

# Représentation et analyse des signaux

## 2.1 Fonctions

### 2.1.1 Fonctions réelles et complexes

Une fonction du temps  $g(t)$  est *réelle* si elle est définie sur l'ensemble des nombres réels, c'est-à-dire si  $g(t) \in \mathbb{R}$ .

Par exemple, la fonction  $g(t) = A \sin(\omega_0 t)$ , où  $A$  est réel, est elle-même une fonction réelle.

Une fonction  $g(t)$  est complexe si elle prend des valeurs complexes : i.e. si  $g(t) \in \mathbb{C}$ .

#### Exemple 2.1 : Fonction exponentielle complexe

Soit  $g(t)$  une exponentielle complexe :

$$g(t) = Ae^{j(\omega_0 t + \varphi)}$$

On peut la représenter sous forme cartésienne, avec une partie réelle et une partie imaginaire, ou sous forme polaire avec un module et une phase :

$$\begin{aligned} g(t) &= g_{\text{réelle}}(t) + jg_{\text{imaginaire}}(t) && \text{(représentation cartésienne)} \\ g(t) &= |g(t)| e^{j\angle g(t)} && \text{(représentation polaire)} \end{aligned}$$

La partie réelle de l'exponentielle complexe  $g(t)$  est :

$$\begin{aligned} g_{\text{réelle}}(t) &= \Re [g(t)] = \Re [Ae^{j(\omega_0 t + \varphi)}] = A\Re [e^{j(\omega_0 t + \varphi)}] \\ g_{\text{réelle}}(t) &= A \cos(\omega_0 t + \varphi) \end{aligned}$$

Sa partie imaginaire est donnée par :

$$\begin{aligned} g_{\text{imaginaire}}(t) &= \Im [g(t)] = \Im [Ae^{j(\omega_0 t + \varphi)}] = A\Im [e^{j(\omega_0 t + \varphi)}] \\ g_{\text{imaginaire}}(t) &= A \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{aligned}$$

Donc  $g(t)$  peut s'exprimer sous forme polaire par :

$$g(t) = Ae^{j(\omega_0 t + \varphi)} = g_{\text{réelle}}(t) + jg_{\text{imaginaire}}(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + jA \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Le module de  $g(t)$  est :

$$\begin{aligned} |g(t)| &= \sqrt{g_{\text{réelle}}^2(t) + g_{\text{imaginaire}}^2(t)} \\ |g(t)| &= \sqrt{[A \cos(\omega_0 t + \varphi)]^2 + [A \sin(\omega_0 t + \varphi)]^2} \\ |g(t)| &= \sqrt{A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)} \\ |g(t)| &= A \sqrt{\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi)} \\ |g(t)| &= A \end{aligned}$$

La phase de  $g(t)$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \angle g(t) &= \arctan \left[ \frac{g_{\text{imaginaire}}(t)}{g_{\text{réelle}}(t)} \right] \\ \angle g(t) &= \arctan \left[ \frac{A \sin(\omega_0 t + \varphi)}{A \cos(\omega_0 t + \varphi)} \right] \\ \angle g(t) &= \arctan \left[ \frac{\sin(\omega_0 t + \varphi)}{\cos(\omega_0 t + \varphi)} \right] \\ \angle g(t) &= \arctan [\tan(\omega_0 t + \varphi)] \\ \angle g(t) &= \omega_0 t + \varphi \end{aligned}$$

Donc, comme prévu :

$$g(t) = |g(t)| e^{j\angle g(t)} = Ae^{j(\omega_0 t + \varphi)}$$

### 2.1.2 Fonctions paires et impaires

Une fonction  $g(t)$  est une *fonction paire* si, pour toutes les valeurs de temps  $t \in \mathbb{R}$ ,  $g(t) = g(-t)$ . Par exemple, la fonction  $g(t) = A \cos(2\pi f_c t)$  est une fonction paire.

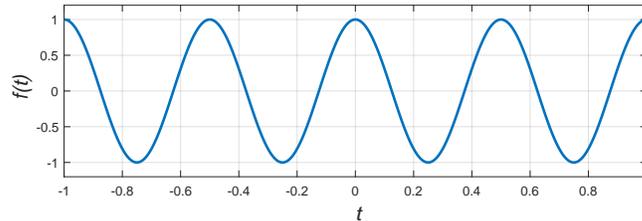


FIGURE 2.1: Exemple de fonction paire  $g(t) = A \cos(2\pi f_c t)$  avec  $f_c = 2$  Hz.

La fonction  $g(t)$  est une *fonction impaire* si  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $g(t) = -g(-t)$ . La fonction  $g(t) = A \sin(2\pi f_c t)$  est une fonction impaire.

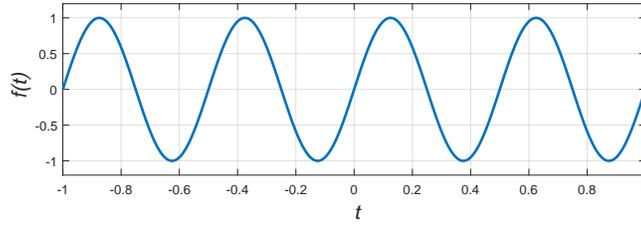


FIGURE 2.2: Exemple de fonction impaire :  $g(t) = A \sin(2\pi f_c t)$  avec  $f_c = 2$  Hz.

Un signal  $g(t)$  peut être représenté par la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire :

$$g(t) = g_{\text{paire}}(t) + g_{\text{impaire}}(t) \quad (2.1)$$

---

### Exemple 2.2 : Fonction échelon

---

La fonction échelon  $g(t) = u(t)$  peut être représentée par la somme d'une fonction paire  $g_{\text{paire}}(t)$  et une fonction impaire  $g_{\text{impaire}}(t)$ , où :

$$\begin{aligned} g_{\text{paire}}(t) &= \frac{A}{2} = \frac{A}{2} [g(t) + g(-t)] = \frac{A}{2} [u(t) + u(-t)] \\ g_{\text{impaire}}(t) &= A \left[ u(t) - \frac{1}{2} \right] = \frac{A}{2} [g(t) - g(-t)] = \frac{A}{2} [u(t) - u(-t)] \end{aligned}$$

---

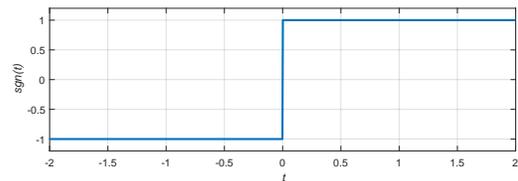
Un signal complexe  $g(t)$  est dit de *symétrie hermitienne* si sa partie réelle,  $g_{\text{réelle}}(t) = \Re [g(t)]$ , est une fonction paire et sa partie imaginaire  $g_{\text{imaginaire}}(t) = \Im [g(t)]$  est impaire.

### 2.1.3 Fonctions mathématiques fréquentes

Parmi les fonctions mathématiques utilisées fréquemment dans l'étude des systèmes de télécommunications, on note les fonctions suivantes :

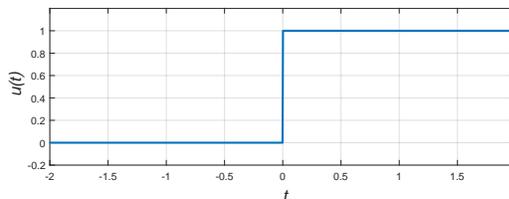
**Fonction signe :**

$$\text{sgn}(t) \triangleq \begin{cases} -1, & \text{pour } t < 0, \\ 0, & \text{pour } t = 0, \\ 1, & \text{pour } t > 0. \end{cases}$$

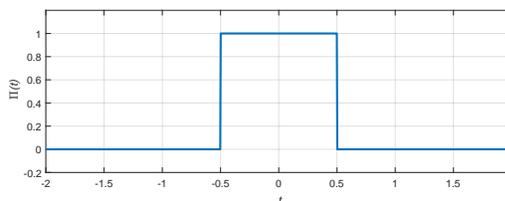


**Fonction échelon :**

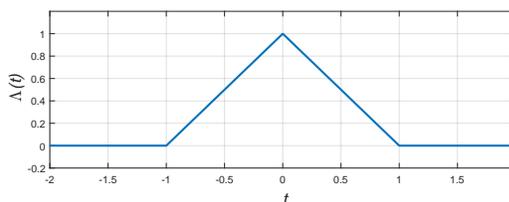
$$u(t) \triangleq \begin{cases} 0, & \text{pour } t < 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{pour } t = 0, \\ 1, & \text{pour } t > 0. \end{cases}$$

**Fonction rectangulaire :**

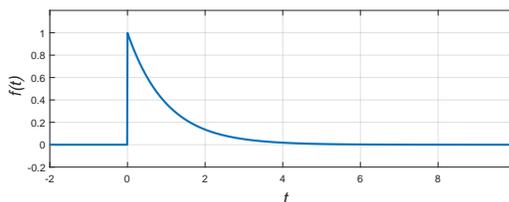
$$\Pi(t) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{pour } -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, & \text{pour } |t| = \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{pour } |t| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

**Fonction triangulaire :**

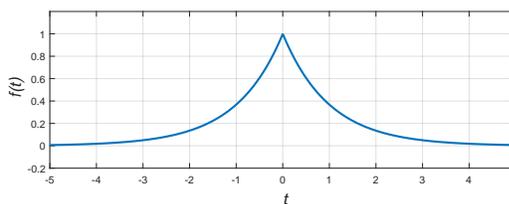
$$\Lambda(t) \triangleq \begin{cases} 1 - |t|, & \text{pour } -1 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{pour } |t| > 1. \end{cases}$$

**Fonction exponentielle :**

$$g(t) \triangleq e^{-\alpha t} u(t)$$

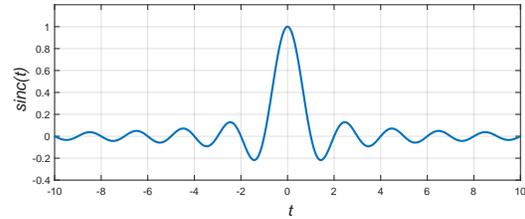
**Fonction exponentielle double :**

$$g(t) \triangleq e^{-\alpha|t|}$$



**Fonction sinc (sinus cardinal) :**

$$\text{sinc}(t) \triangleq \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

**2.1.4 Fonction de Dirac**

La fonction de Dirac est définie par :

$$\delta(t) \triangleq \begin{cases} 0, & \text{pour } t \neq 0, \\ \infty, & \text{à } t = 0. \end{cases}$$

Elle prend donc une valeur infinie à l'origine et est nulle partout ailleurs. L'aire sous cette impulsion  $\delta(t)$  est unitaire :, i.e.  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ . On peut la décrire comme étant la dérivée par rapport au temps de la fonction échelon :

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} [u(t)]$$

La fonction de Dirac fait partie de la famille des *fonctions généralisées* et possède les propriétés suivantes :

**Extraction :** Soit  $g(t)$  une fonction quelconque :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)g(t) dt = g(0)$$

Cette propriété est connue sous le nom de propriété d'*extraction* (ou "*sifting*" en anglais). Elle s'applique à toute valeur du temps  $t_0$  :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)g(t) dt = g(t_0)$$

**Échelonnage :**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\alpha t)g(t) dt = \frac{1}{|\alpha|} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)g\left(\frac{t}{\alpha}\right) dt = \frac{1}{|\alpha|}g(0)$$

Donc,  $\delta(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(t)$ . Ainsi, pour  $\alpha = -1$ , on a :  $\delta(-t) = \delta(t)$  et donc la fonction de Dirac  $\delta(t)$  est une fonction paire.

**Convolution**

$$g(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\delta(t - \tau) d\tau = g(t)$$

## 2.2 Classification des signaux et des systèmes

### 2.2.1 Signaux continus et signaux discrets

On définit ici un *signal* comme étant une fonction du temps  $g(t)$  où  $t \in \mathbb{R}$ .

Un signal peut être *réel*, par exemple, la fonction :

$$\begin{aligned} g(t) &= A \sin(2\pi f_c t + \varphi) && \text{ou complexe :} \\ g(t) &= A e^{j(2\pi f_c t + \varphi)} \end{aligned}$$

ici,  $A$ ,  $f_c$  et  $\varphi$  sont réels. La fonction  $g(t)$  étant définie pour toutes les valeurs du temps  $t$ , on la définit comme une *fonction continue du temps*.

Si un signal n'est défini que pour les valeurs discrètes (ou discontinues) du temps seulement, alors on dit que le signal est *discret*, par exemple :

$$g_k = A \sin(2\pi f_c k + \varphi)$$

où  $k \in \mathbb{Z}$ , c'est-à-dire  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  (ici encore,  $A$ ,  $f_c$  et  $\varphi$  sont réels).

### 2.2.2 Signaux analogiques et signaux numériques

Si un signal continu  $g(t)$ , ou discret  $g_k$ , ne peut prendre qu'un nombre fini  $M$  d'amplitudes alors  $g(t)$ , ou  $g_k$ , est un *signal numérique M-aire*. Si  $M = 2$ , le signal est binaire.

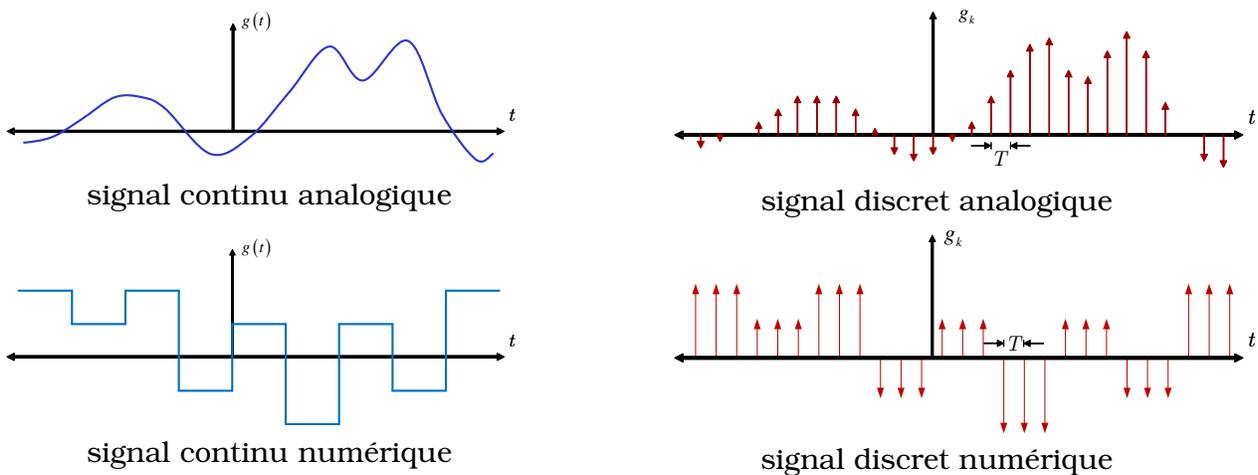


FIGURE 2.3: Exemple de signaux continus, discrets, analogiques et numériques.

### 2.2.3 Signaux périodiques et apériodiques

**Définition**(*signal périodique*) :

On dit d'un signal  $g(t)$  qu'il est *périodique* si pour toutes les valeurs du temps  $t$ , il obéit à la condition suivante :

$$g(t) = g(t + T)$$

où  $T$  est une constante. La plus petite valeur de  $T$  satisfaisant cette condition est appelée *période*  $T$  de la fonction périodique  $g(t)$ .

Les fonctions suivantes sont des exemples de fonctions périodiques, de période  $T = \frac{1}{f_c}$  :

$$f(t) = A \sin(2\pi f_c t + \varphi) \quad \text{et} \quad g(t) = A e^{j(2\pi f_c t + \varphi)}$$

**Définition**(*signal apériodique*) :

Un signal  $g(t)$  pour lequel il n'existe aucune valeur de  $T$  satisfaisant la condition de périodicité est appelée *fonction apériodique* ou encore *fonction non périodique*.

### 2.2.4 Fonctions orthogonales et fonctions orthonormales

Une propriété importante des fonctions périodiques est que l'on peut les représenter comme une combinaison de fonctions de base bien définies.

#### Orthogonalité

**Définition**(*fonctions orthogonales*) :

Deux fonctions,  $f(t)$  et  $g(t)$ , sont dites *orthogonales* dans un intervalle  $t \in [t_1, t_2]$  si :

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)g^*(t) dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_{t_1}^{t_2} f^*(t)g(t) dt = 0$$

où  $f^*(t)$  et  $g^*(t)$  sont les conjugués des fonctions complexes  $f(t)$  et  $g(t)$ .

Si  $f(t)$  et  $g(t)$  sont des fonctions réelles, alors la condition d'orthogonalité se résume à :

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)g(t) dt = 0$$

---

#### Exemple 2.3 : Fonction orthogonale

---

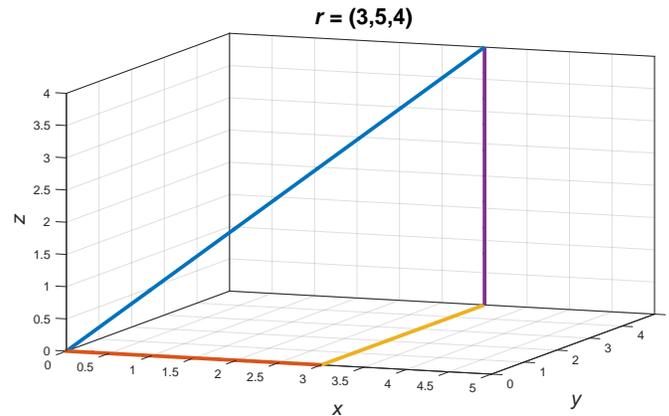


FIGURE 2.4: Signaux orthogonaux : représentation dans un espace à trois dimensions.

Un vecteur dans un espace à trois dimensions peut être représenté par la combinaison de trois vecteurs de base sur les axes (cartésiens)  $x$ ,  $y$ , et  $z$ .

### Orthonormalité

**Définition**(fonctions orthonormales) :

Deux fonctions orthogonales,  $f(t)$  et  $g(t)$ , sont *orthonormales* dans un intervalle  $t \in [t_1, t_2]$  si :

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)f^*(t) dt = 1 \quad \text{et} \quad \int_{t_1}^{t_2} g(t)g^*(t) dt = 1.$$

### 2.2.5 Signaux déterministes et signaux aléatoires

**Définition**(signal déterministe) :

Un signal *déterministe*  $g(t)$  est un signal pour lequel on connaît exactement sa valeur en tout temps.

Par exemple, la fonction :

$$g(t) = A \sin(2\pi f_c t + \theta)$$

est connue de manière non équivoque pour toutes les valeurs de temps.

**Définition**(signal aléatoire) :

Un signal *aléatoire*  $g(t)$  est un signal pour lequel il existe une *incertitude* quant à sa valeur au temps  $t$ .

Par exemple, si  $X$  est une variable aléatoire de fonction de densité de probabilité  $f_X(x)$  alors la fonction temporelle  $g(t)$  :

$$g(t) = X \sin(2\pi f_c t + \theta)$$

est aléatoire car on ne sait pas de façon sûre qu'elle est l'amplitude  $X$  de la sinusoïde.

## 2.3 Séries de Fourier

### Séries de Fourier trigonométriques

Une fonction périodique  $g_T(t)$ , de période  $T = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$ , peut être décomposée en une série infinie de fonctions sinusoïdales et cosinusoïdales, i.e. en *série de Fourier trigonométrique* :

$$g_T(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \quad (2.2)$$

où  $n \in \mathbb{N}^+$  (entiers positifs). Les coefficients de la série de Fourier trigonométrique sont donnés par :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} g_T(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} g_T(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} g_T(t) \sin(n\omega_0 t) dt \end{aligned} \quad (2.3)$$

En utilisant les relations d'Euler :

$$\sin \varphi = \frac{1}{2j} (e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}) \quad \text{et} \quad \cos \varphi = \frac{1}{2} (e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}) \quad (\text{où } j \triangleq \sqrt{-1}) \quad (2.4)$$

on peut réécrire l'expression du développement en série de Fourier trigonométrique de la fonction périodique  $g_T(t)$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} g_T(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \\ g_T(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \frac{1}{2} (e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) + b_n \frac{1}{2j} (e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}) \right] \\ g_T(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{a_n}{2} e^{jn\omega_0 t} + \frac{a_n}{2} e^{-jn\omega_0 t} + \frac{b_n}{2j} e^{jn\omega_0 t} - \frac{b_n}{2j} e^{-jn\omega_0 t} \right] \\ g_T(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{a_n}{2} - \frac{jb_n}{2} \right) e^{jn\omega_0 t} + \left( \frac{a_n}{2} + \frac{jb_n}{2} \right) e^{-jn\omega_0 t} \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

### Séries de Fourier exponentielles complexes

En posant,  $c_0 = a_0$  et  $c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$ , cette série infinie devient le développement en série de Fourier exponentielle complexe :

$$g_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad \text{où } n \in \mathbb{N}. \quad (2.6)$$

Les coefficients de la série de Fourier exponentielle complexe sont :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} g_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (2.7)$$

### Propriétés des séries de Fourier

#### Fonctions paires :

Soit  $g_T(t)$  une fonction paire, c'est-à-dire  $g_T(t) = g_T(-t), \forall t$ , alors le développement en série de Fourier trigonométrique est constitué d'un niveau continu,  $a_0$ , et d'une série de fonctions (paires) cosinusoïdales :

$$g_T(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) \quad (2.8)$$

Son développement en série de Fourier exponentielle complexe est donné par :

$$g_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (2.9)$$

où cette fois-ci les coefficients sont égal à :  $c_0 = a_0$  et  $c_n = \frac{a_n}{2}$ .

#### Fonctions impaires :

Si  $g_T(t) = -g_T(-t), \forall t$ , i.e. une fonction impaire, alors son développement en série de Fourier trigonométrique a un niveau continu nul,  $a_0 = 0$ , et n'est constitué que de fonctions (impaires) sinusoïdales :

$$g_T(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t) \quad (2.10)$$

Son développement en série de Fourier exponentielle complexe est donné par :

$$g_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (2.11)$$

où cette fois-ci les coefficients sont :  $c_0 = 0$  et  $c_n = \frac{-jb_n}{2}$ .

## 2.4 Transformée de Fourier

Les séries de Fourier trigonométriques ou exponentielles complexes permettent de représenter dans le domaine des fréquences des fonctions temporelles périodiques.

Cependant, en pratique, les signaux ne sont pas périodiques (en général) et les séries de Fourier ne permettent pas de les représenter.

La transformée de Fourier, basée sur la définition de série de Fourier exponentielle complexe, permet de représenter des fonctions *apériodiques* dans le domaine des fréquences.

Considérons le développement d'une fonction périodique  $g_T(t)$ , de période  $T = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$ , en série de Fourier exponentielle complexe :

$$g_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad \text{où } n \in \mathbb{N}. \quad (2.12)$$

Les coefficients de la série de Fourier sont donnés par :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} g_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (2.13)$$

La série de coefficients,  $\{c_n\}$ , représente les composantes spectrales discrètes du *spectre de ligne* de la fonction périodique  $g_T(t)$ .

Soient  $\omega_n = n\omega_0 = \frac{2\pi n}{T}$  la fréquence discrète de la  $n^{\text{ième}}$  composante spectrale et  $\Delta\omega_n = n\omega_0 - (n-1)\omega_0$  c'est-à-dire  $\omega_n = \omega_0$  l'espacement en fréquence entre ces composantes spectrales. Normalisons également les coefficients de la série exponentielle complexe de Fourier :  $c'_n = Tc_n = \frac{2\pi}{\omega_0} c_n$ .

On peut exprimer la fonction périodique  $g_T(t)$  par :

$$g_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_0}{2\pi} c'_n e^{j\omega_n t} \quad (2.14)$$

$$g_T(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n e^{j\omega_n t} \Delta\omega_n$$

On peut réécrire l'expression des coefficients de la série de Fourier :

$$c'_n = Tc_n = T \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} g_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (2.15)$$

$$c'_n = \int_{t_0}^{t_0+T} g_T(t) e^{-j\omega_n t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g_T(t) e^{-j\omega_n t} dt$$

en choisissant  $t_0 = -\frac{T}{2}$  comme début de la période d'intégration.

Une fonction apériodique  $g(t)$  peut être représentée comme une fonction périodique  $g_T(t)$  mais de *période infinie*, c'est-à-dire :

$$g(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} g_T(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n e^{j\omega_n t} \Delta\omega_n \quad (2.16)$$

Lorsque  $T \rightarrow \infty$ , l'espacement entre les raies spectrales  $\Delta\omega_n = \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0$  et la somme des composantes spectrales discrètes devient une intégrale d'un spectre continu sur l'ensemble des fréquences continues :

$$\begin{aligned} g(t) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n e^{j\omega_n t} \Delta\omega_n & (2.17) \\ g(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

où le spectre continu  $G(\omega)$  remplace le spectre de ligne avec les coefficients de la série de Fourier exponentielle complexe,  $\{c_n\}$  et  $\omega$  est la fréquence angulaire continue (en radians par seconde).

Le spectre continu  $G(\omega)$  est donné par :

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} c'_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g_T(t) e^{-j\omega_n t} dt & (2.18) \\ G(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

La transformée de Fourier (directe) d'une fonction temporelle  $g(t)$  est donnée par :

$$G(\omega) = \mathcal{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.19)$$

La transformée de Fourier inverse d'une fonction dans le domaine des fréquence  $G(\omega)$  est :

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}[G(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.20)$$

Les transformées de Fourier directe et inverse forment une paire de fonctions réversibles :

$$G(\omega) = \mathcal{F}[g(t)] = \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[G(\omega)]] \quad \text{et} \quad g(t) = \mathcal{F}^{-1}[G(\omega)] = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[g(t)]] \quad (2.21)$$

En télécommunications, on s'intéresse à la représentation des signaux et systèmes en fonction des *fréquences physiques* (en Hertz plutôt qu'en radians par seconde). La transformée de Fourier s'exprime alors par la paire de relations suivantes :

$$G(f) = \mathcal{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (2.22)$$

pour la transformée de Fourier directe et par

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}[G(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi ft} df \quad (2.23)$$

pour la transformée de Fourier inverse.

### 2.4.1 Existence de la transformée de Fourier

Il n'est pas assuré qu'une fonction  $g(t)$  ait une transformée de Fourier et, réciproquement, il n'est pas assuré qu'un spectre  $G(f)$  ait une transformée de Fourier inverse. Les *trois conditions de Dirichlet* permettent de déterminer si une fonction possède une transformée de Fourier.

**Condition I :** L'intégrale  $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt$  doit être finie :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt < \infty.$$

**Condition II :** La fonction  $g(t)$  doit avoir un nombre fini de maxima et de minima dans un intervalle fini de temps :  $[t_1, t_2]$ .

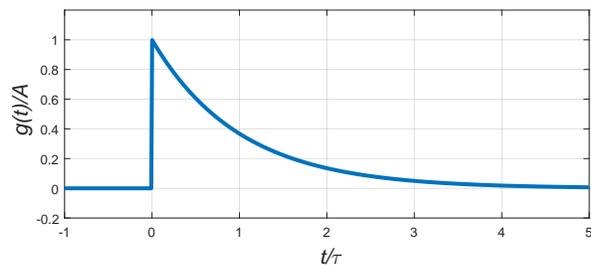
**Condition III :**  $g(t)$  doit avoir un nombre fini de discontinuités dans un intervalle fini  $[t_1, t_2]$ .

Les conditions de Dirichlet sont des conditions *suffisantes mais non nécessaires*, c'est-à-dire que si elles sont respectées, il existe une transformée de Fourier. Cependant, si elles ne le sont pas, il n'est pas assuré qu'il existe (ou qu'il n'existe pas) une transformée de Fourier.

#### Exemple 2.4 : Transformée de Fourier d'une fonction exponentielle

Soit  $g(t)$  une fonction exponentielle :

$$g(t) = \begin{cases} Ae^{-\frac{t}{\tau}}, & \text{pour } t \geq 0 \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$



La fonction  $g(t)$  suit les trois conditions de Dirichlet :

1.  $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt < \infty$ ,
2. nombre fini de minima et maxima dans un intervalle fini, et
3. nombre fini de discontinuités dans un intervalle fini.

Les trois conditions suffisantes de Dirichlet étant respectées, la transformée de Fourier de la fonction  $g(t)$  existe. Elle est donnée par :

$$G(f) = \mathcal{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^{\infty} Ae^{-\frac{t}{\tau}} e^{-j2\pi ft} dt$$

$$G(f) = A \int_0^{\infty} e^{-(\frac{1}{\tau} + j2\pi f)t} dt$$

Or  $\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}$ .

$$G(f) = A \int_0^{\infty} e^{-(\frac{1}{\tau} + j2\pi f)t} dt = A \left[ \frac{1}{-(\frac{1}{\tau} + j2\pi f)} \right] e^{-(\frac{1}{\tau} + j2\pi f)t} \Bigg|_0^{\infty} = A \left[ \frac{1}{-(\frac{1}{\tau} + j2\pi f)} \right] (0 - 1)$$

$$G(f) = \frac{A}{\frac{1}{\tau} + j2\pi f} = \left( \frac{A\tau}{1 + j2\pi f\tau} \right) \left( \frac{1 - j2\pi f\tau}{1 - j2\pi f\tau} \right)$$

$$G(f) = \frac{A\tau(1 - j2\pi f\tau)}{1 + 4\pi^2 f^2 \tau^2}$$

Le spectre  $G(f)$  est une fonction complexe :

$$G(f) = \frac{A\tau}{1 + 4\pi^2 f^2 \tau^2} - j \frac{2\pi f A\tau^2}{1 + 4\pi^2 f^2 \tau^2}$$

On peut représenter le spectre complexe de  $G(f)$  en coordonnées cartésiennes avec ses parties réelles et imaginaires,  $\Re[G(f)]$  et  $\Im[G(f)]$ , ou en coordonnées polaires avec un module  $|G(f)|$  et une phase  $\angle G(f)$  :

$$\Re[G(f)] = \frac{A\tau}{1 + 4\pi^2 f^2 \tau^2} \quad \text{et} \quad \Im[G(f)] = \frac{-2\pi f A\tau^2}{1 + 4\pi^2 f^2 \tau^2}$$

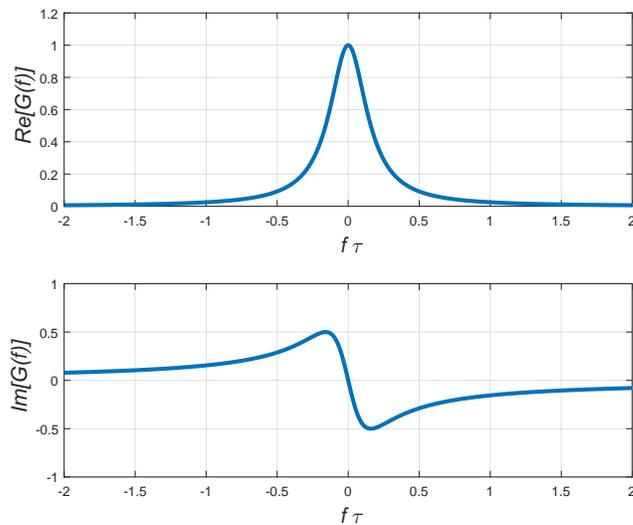


FIGURE 2.5: Parties réelle,  $\Re[G(f)]$ , et imaginaire,  $\Im[G(f)]$ , du spectre de  $g(t)$ .

Le module de  $G(f)$  est donné par :

$$\begin{aligned}
 |G(f)| &= \sqrt{[\Re[G(f)]]^2 + [\Im[G(f)]]^2} = \sqrt{\left[\frac{A\tau}{1+4\pi^2 f^2 \tau^2}\right]^2 + \left[\frac{-2\pi f A\tau^2}{1+4\pi^2 f^2 \tau^2}\right]^2} \\
 |G(f)| &= \sqrt{\frac{A^2 \tau^2}{(1+4\pi^2 f^2 \tau^2)^2} + \frac{(-2\pi f A\tau^2)^2}{(1+4\pi^2 f^2 \tau^2)^2}} = \sqrt{\frac{A^2 \tau^2 + 4\pi^2 f^2 A^2 \tau^4}{(1+4\pi^2 f^2 \tau^2)^2}} \\
 |G(f)| &= \sqrt{\frac{A^2 \tau^2 (1+4\pi^2 f^2 \tau^2)}{(1+4\pi^2 f^2 \tau^2)^2}} = \frac{A\tau}{1+4\pi^2 f^2 \tau^2} \sqrt{1+4\pi^2 f^2 \tau^2}
 \end{aligned}$$

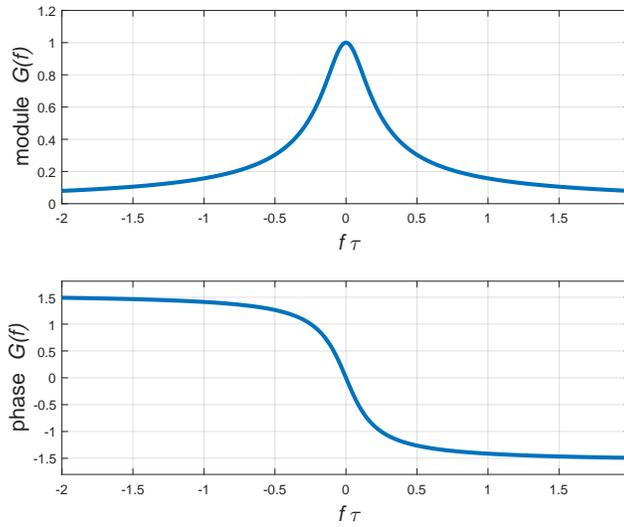


FIGURE 2.6: Module,  $|G(f)|$ , et phase,  $\angle G(f)$ , du spectre de  $g(t)$ .

Le module  $|G(f)|$  est une fonction paire :

$$|G(f)| = \frac{A\tau}{\sqrt{1+4\pi^2 f^2 \tau^2}}$$

La phase  $\angle G(f)$ , elle est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \angle G(f) &= \arctan \left[ \frac{\Im[G(f)]}{\Re[G(f)]} \right] = \arctan \left[ \frac{\left( \frac{-2\pi f A\tau^2}{1+4\pi^2 f^2 \tau^2} \right)}{\left( \frac{A\tau}{1+4\pi^2 f^2 \tau^2} \right)} \right] \\
 \angle G(f) &= \arctan \left[ \frac{-2\pi f A\tau^2}{A\tau} \right] = \arctan(-2\pi f\tau)
 \end{aligned}$$

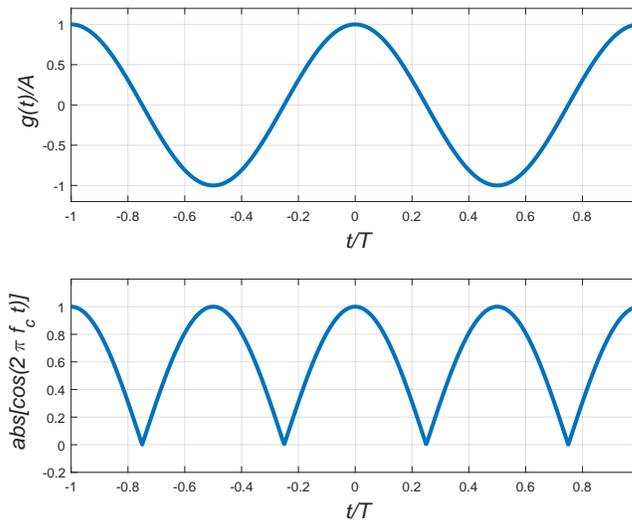
$$\angle G(f) = -\arctan(2\pi f\tau)$$

**Exemple 2.5 :** Transformée de Fourier d'une fonction cosinusoidale

Soit  $g(t) = A \cos(2\pi f_c t)$  où  $A$  est une constante finie. Est-ce que cette fonction  $g(t)$  suit les conditions (suffisantes) de Dirichlet ?

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |A \cos(2\pi f_c t)| dt = |A| \int_{-\infty}^{\infty} |\cos(2\pi f_c t)| dt$$

Si on trace la fonction  $|\cos(2\pi f_c t)|$  en fonction du temps, on obtient :



Sur une période de temps  $T = \frac{1}{f_c} = \frac{2\pi}{\omega_c}$ , l'intégrale donne une valeur finie :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T} |g(t)| dt &= 2 \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \cos(2\pi f_c t) dt \\ \int_{t_0}^{t_0+T} |g(t)| dt &= 2 \frac{1}{2\pi f_c} \sin(2\pi f_c t) \Big|_{\frac{T}{4} = \frac{1}{4f_c}}^{-\frac{T}{4} = -\frac{1}{4f_c}} \\ \int_{t_0}^{t_0+T} |g(t)| dt &= \frac{1}{\pi f_c} \left[ \sin\left(2\pi f_c \frac{1}{4f_c}\right) - \sin\left(-2\pi f_c \frac{1}{4f_c}\right) \right] \\ \int_{t_0}^{t_0+T} |g(t)| dt &= \frac{1}{\pi f_c} \left[ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] \\ \int_{t_0}^{t_0+T} |g(t)| dt &= \frac{1}{\pi f_c} [1 - (-1)] \end{aligned}$$

Donc,  $\int_{t_0}^{t_0+T} |g(t)| dt = \frac{2}{\pi f_c}$  par période, et ce, pour un nombre infini de périodes :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} |g(t)| dt = \infty \times \frac{2}{\pi f_c} = \infty.$$

La première condition de Dirichlet n'est donc pas respectée. Nous ne sommes donc pas assurés de l'existence de la transformée de Fourier.

Quant aux deux autres conditions de Dirichlet, on peut aisément constater que la fonction  $g(t) = A \cos(2\pi f_c t)$  a un nombre fini de maxima et de minima sur une période finie (ou intervalle de temps fini)  $[t_1, t_2]$ . De plus, il y a un nombre fini (ici aucune discontinuité) de discontinuités par intervalle de temps fini.

Effectuons le calcul de la transformée de  $g(t)$ , même si nous ne sommes sûr de son existence, en utilisant le relation d'Euler :

$$g(t) = A \cos(2\pi f_c t) = \frac{A}{2} [e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t}]$$

Sachant que la transformée de Fourier d'une fonction exponentielle complexe est de la forme :

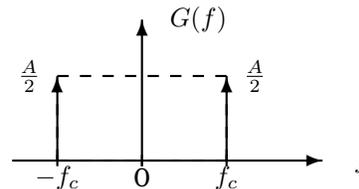
$$\begin{aligned} \mathcal{F} [e^{j2\pi f_c t}] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f_c t} e^{-j2\pi f t} dt \\ \mathcal{F} [e^{j2\pi f_c t}] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(2\pi f - 2\pi f_c)t} dt \\ \mathcal{F} [e^{j2\pi f_c t}] &= \delta(f - f_c) \end{aligned}$$

Le spectre  $G(f)$  est alors égal à :

$$\begin{aligned} G(f) &= \mathcal{F} [g(t)] = \mathcal{F} [A \cos(2\pi f_c t)] \\ G(f) &= \mathcal{F} \left\{ \frac{A}{2} [e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t}] \right\} \\ G(f) &= \frac{A}{2} \{ \mathcal{F} [e^{j2\pi f_c t}] + \mathcal{F} [e^{-j2\pi f_c t}] \} \end{aligned}$$

Donc

$$G(f) = \frac{A}{2} [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] \quad (2.24)$$



Comme prévu, la transformée de Fourier de la fonction réelle et paire  $g(t) = A \cos(2\pi f_c t)$  est aussi une fonction réelle et paire :  $G(f) = \frac{A}{2} [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)]$ .

### 2.4.2 Propriétés de la transformée de Fourier

**Réversibilité :** Si  $G(f) = \mathcal{F} [g(t)]$ , alors

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1} [G(f)] = \mathcal{F}^{-1} [\mathcal{F} [g(t)]]$$

**Dualité temps-fréquence :** Soit la paire de fonctions temporelle et fréquentielle :  $g(t) \iff G(f)$ . Si la fonction temporelle  $G(t)$  a la même allure que le spectre  $G(f)$ , mais pour la variable de temps  $t$ , alors :

$$\begin{aligned} g(t) &\iff G(f) \\ G(t) &\iff g(-f) \end{aligned}$$

**Linéarité :** Soient  $g(t) \iff G(f)$  et  $h(t) \iff H(f)$ . Si  $y(t)$  est une combinaison linéaire de  $g(t)$  et de  $h(t)$  :

$$y(t) = \alpha g(t) + \beta h(t)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes scalaires, alors

$$Y(f) = \mathcal{F}[y(t)] = \mathcal{F}[\alpha g(t) + \beta h(t)]$$

$$Y(f) = \alpha \mathcal{F}[g(t)] + \beta \mathcal{F}[h(t)]$$

$$Y(f) = \alpha G(f) + \beta H(f)$$

Le spectre  $Y(f)$  est donc aussi une combinaison linéaire des spectres  $G(f)$  et  $H(f)$ .

**Rééchantillonnage temporel :** Pour  $\alpha$  constant :

$$g(\alpha t) \iff \frac{1}{|\alpha|} G\left(\frac{f}{\alpha}\right).$$

**Décalage temporel :** Si  $g(t) \iff G(f)$ , alors un décalage dans le temps de  $t_0$  dans le temps de la fonction  $g(t)$  donne :

$$g(t - t_0) \iff G(f)e^{-j2\pi f t_0}.$$

**Décalage fréquentiel :** Un décalage fréquentiel de  $f_0$  du spectre  $G(f)$  résulte en :

$$G(f - f_0) \iff g(t)e^{j2\pi f_0 t}.$$

**Dérivation temporelle :** La transformée de Fourier de la dérivée par rapport au temps  $t$  est égale à :

$$\frac{d}{dt}g(t) \iff j2\pi f G(f).$$

**Intégration temporelle :** La transformée de Fourier de l'intégrale par rapport au temps  $t$  est égale à :

$$\int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau \iff \frac{1}{j2\pi f} G(f) + \frac{G(0)}{2} \delta(f).$$

**Conjuguées :** Si  $g(t) \iff G(f)$ , alors  $g^*(t) \iff G^*(-f)$ .

**Multiplication temporelle :** Le produit de deux fonctions temporelles  $g(t)$  et  $h(t)$  est donnée par :

$$g(t)h(t) \iff G(f) * H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\lambda)H(f - \lambda) d\lambda.$$

c'est-à-dire la convolution des spectres.

**Convolution temporelle :** La convolution de deux fonctions temporelles  $g(t)$  et  $h(t)$  donne :

$$g(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)h(t - \tau) d\tau \iff G(f)H(f).$$

**Aire sous la fonction temporelle :** L'aire sous la fonction temporelle  $g(t)$  est égale à la valeur de son spectre à  $f = 0$  :

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt = G(0).$$

**Aire sous la fonction fréquentielle :** L'aire sous le spectre  $G(f)$  est égale à la valeur de  $g(t)$  à  $t = 0$  :

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(f) df = g(0).$$

### 2.4.3 Propriétés de symétrie de la transformée de Fourier

TABLE 2.1: Propriétés de symétrie de la transformée de Fourier.

fonction temporelle $g(t)$	spectre $G(f)$
réelle et paire	réelle et paire
réelle et impaire	imaginaire et impaire
imaginaire et paire	imaginaire et paire
imaginaire et impaire	réelle et impaire
complexe et paire	complexe et paire
complexe et impaire	complexe et impaire

Ces propriétés de symétrie des fonctions temporelle  $g(t)$  et fréquentielle  $G(f)$  peuvent servir à vérifier le calcul des transformées directe et inverse de Fourier.

## 2.4.4 Transformées de Fourier usuelles

TABLE 2.2: Transformées de Fourier.

domaine temporel $x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(f)]$	domaine fréquentiel $X(f) = \mathcal{F}[x(t)]$
$\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$	$T \operatorname{sinc}(fT)$
$\operatorname{sinc}(2Wt)$	$\frac{1}{2W} \Pi\left(\frac{f}{2W}\right)$
$e^{-at}u(t)$ , pour $a > 0$	$\frac{1}{a+j2\pi f}$
$e^{-a t }$ , pour $a > 0$	$\frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}$
$\Lambda(t)$	$\operatorname{sinc}^2(f)$
$\delta(t)$	1
1	$\delta(f)$
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0}$
$e^{j2\pi f c t}$	$\delta(f - f_c)$
$\cos(2\pi f c t)$	$\frac{1}{2}[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)]$
$\sin(2\pi f c t)$	$\frac{1}{2j}[\delta(f - f_c) - \delta(f + f_c)]$
$\operatorname{sgn}(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$
$\frac{1}{\pi t}$	$-j \operatorname{sgn}(f)$
$u(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$
$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t - iT_0)$	$\frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{n}{T_0})$

## 2.5 Énergie et puissance d'un signal

### 2.5.1 Énergie d'un signal

**Définition**(*énergie normalisée d'un signal*) :

Soit  $x(t)$  une fonction représentant une tension (i.e. voltage). Alors l'énergie  $E$  de cette fonction (ou signal) est donnée par :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t) dt \quad \text{ou encore} \quad E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

*Remarque* : L'énergie  $E$  est exprimée en Joules. Il s'agit ici d'une énergie normalisée pour une impédance de  $1 \Omega$ . Le produit  $x(t)x^*(t)$  donne des  $V^2$  (volts<sup>2</sup>), et conséquemment, il faut diviser ce produit par une impédance (en  $\Omega$ ) pour obtenir une puissance en Watts. En intégrant cette puissance  $P$  sur une période de temps, on obtient, tel que prévu, une énergie en Joules.

Si le signal  $x(t)$  est limité dans le temps, c'est-à-dire que la fonction  $x(t)$  n'est définie que dans l'intervalle :  $t_1 \leq t \leq t_2$ , alors on peut exprimer l'énergie  $E$  par :

$$E = \int_{t_1}^{t_2} x(t)x^*(t) dt \quad \text{ou} \quad E = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \quad (2.25)$$

### 2.5.2 Puissance d'un signal

**Définition**(*puissance instantanée d'un signal*) :

La puissance instantanée d'un signal de tension  $v(t)$  avec un courant  $i(t)$  est :

$$p(t) = v(t) i(t) \quad [\text{watts}]$$

**Définition**(*puissance moyenne d'un signal*) :

La puissance moyenne est obtenue de sa moyenne temporelle :

$$P = \langle p(t) \rangle = \langle v(t) i(t) \rangle$$

Par exemple, la puissance moyenne d'un signal de tension  $v(t)$  dans une charge résistive  $R$  est :

$$P = \frac{\langle v^2(t) \rangle}{R} = \frac{V_{RMS}^2}{R}$$

ou encore

$$P = R \langle i^2(t) \rangle = RI_{RMS}^2$$

**Définition**(puissance moyenne normalisée d'un signal) :

La puissance moyenne normalisée  $P$  d'un signal  $x(t)$  est donnée par son énergie divisée par sa durée :

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x^*(t)dt \quad [\text{watts}]$$

ou si le signal  $x(t)$  est de durée finie :

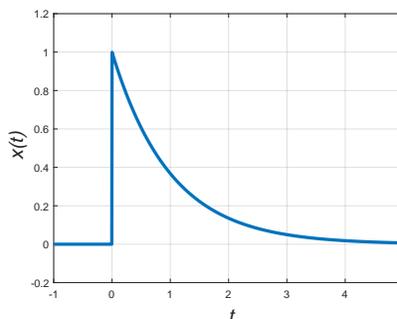
$$P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t)x^*(t)dt$$

Remarque : il s'agit ici d'une puissance normalisée pour une impédance de 1 ohm.

**Exemple 2.6** : Énergie et puissance du signal  $x(t) = Ae^{-\alpha t}u(t)$

Soit  $x(t) = Ae^{-\alpha t}u(t)$ . L'énergie  $E$  de ce signal est donnée par :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t) dt$$



$x(t)$  étant une fonction réelle, l'énergie s'exprime tout simplement par :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-\alpha t}u(t)Ae^{-\alpha t}u(t) dt$$

$$E = A^2 \int_0^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-\alpha t} dt = A^2 \int_0^{\infty} e^{-2\alpha t} dt$$

$x(t)$  étant non-nulle que pour les valeurs de temps positives.

$$E = A^2 \int_0^{\infty} e^{-2\alpha t} dt = A^2 \frac{1}{-2\alpha} e^{-2\alpha t} \Big|_0^{\infty}$$

$$E = \frac{-A^2}{2\alpha} (e^{-\infty} - e^0) = \frac{-A^2}{2\alpha} (0 - 1)$$

$$E = \frac{A^2}{2\alpha}$$

Donc sur une période de temps infinie, c'est-à-dire  $t \in [0, \infty)$ , le signal  $x(t)$  est d'énergie finie  $E = \frac{A^2}{2\alpha}$ .

Calculons maintenant la puissance moyenne de ce signal  $x(t)$  :

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x^*(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2\alpha T}$$

$$\boxed{P = 0}$$

Le signal  $x(t) = Ae^{-\alpha t}u(t)$  est donc un signal d'énergie finie  $E = \frac{A^2}{2\alpha}$  et de puissance moyenne nulle, i.e.  $P = 0$ .

**Exemple 2.7 :** Énergie et puissance du signal  $x(t) = A \sin(2\pi f_c t)$

Considérons maintenant le signal suivant  $x(t) = A \sin(2\pi f_c t)$ . Il s'agit d'une sinusoïde de fréquence  $f_c$  et d'amplitude  $A$ . C'est une fonction réelle du temps et son énergie est donnée par :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} A \sin(2\pi f_c t) A \sin(2\pi f_c t) dt = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2(2\pi f_c t) dt$$

Or  $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}[1 - \cos(2\theta)]$  et donc,

$$E = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2(2\pi f_c t) dt = \frac{A^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos(4\pi f_c t)] dt = \frac{A^2}{2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dt - \int_{-\infty}^{\infty} \cos(4\pi f_c t) dt \right]$$

$$E = \frac{A^2}{2} \left[ t \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{4\pi f_c} \sin(4\pi f_c t) \Big|_{-\infty}^{\infty} \right]$$

La première intégrale résulte en une valeur infinie alors que la seconde a une valeur bornée par -1 et +1. Donc

$$\boxed{E \rightarrow \infty}$$

On pourrait conclure qu'un générateur de fonction d'onde produisant un signal d'amplitude finie  $A$  possède une énergie infinie (en supposant que celui-ci fonctionne sur toutes les valeurs de temps  $t \in (-\infty, \infty)$ ).

Estimons maintenant la puissance moyenne  $P$  du signal  $x(t)$  :

$$\begin{aligned}
 P &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x^*(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A \sin(2\pi f_c t) A \sin(2\pi f_c t) dt \\
 P &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 \sin^2(2\pi f_c t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt - \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(4\pi f_c t) dt \right] \\
 P &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2T} \left[ t \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{4\pi f_c} \sin(4\pi f_c t) \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \right] \\
 P &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2T} \left\{ \left[ \frac{T}{2} - \left( -\frac{T}{2} \right) \right] - \frac{1}{4\pi f_c} \left[ \sin \left( 4\pi f_c \frac{T}{2} \right) - \sin \left( -4\pi f_c \frac{T}{2} \right) \right] \right\} \\
 P &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{A^2}{2} - \underbrace{\frac{A^2}{4\pi f_c T} \sin \left( 4\pi f_c \frac{T}{2} \right)}_{\text{tend vers 0 pour } T \rightarrow \infty} \right]
 \end{aligned}$$

Et finalement,

$$P = \frac{A^2}{2}$$

Le signal  $x(t)$  est donc un signal d'énergie infinie mais de puissance moyenne finie et non-nulle.

### 2.5.3 Valeur en c.c. et valeur efficace d'un signal

**Définition** (valeur en courant continu (DC) d'un signal) :

La valeur en courant continu  $X_{DC}$  d'un signal  $x(t)$  est :

$$X_{RMS} = \langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad [\text{mêmes unités}]$$

**Définition** (valeur efficace d'un signal) :

La valeur efficace  $X_{RMS}$  d'un signal  $x(t)$  est donnée par :

$$X_{DC} = \sqrt{\langle x^2(t) \rangle} = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt} \quad [\text{mêmes unités}]$$

### 2.5.4 Mesures en décibels

**Définition**(puissance en décibels) :

La puissance d'un signal  $s(t)$  est souvent exprimée en fonction d'un signal de référence de puissance de 1 milliWatt (mW) :

$$P_{\text{dBm}} = 10 \log_{10} \left( \frac{P_{\text{signal}} \text{ (en Watts)}}{10^{-3}} \right) \quad [\text{dBm}]$$

$$P_{\text{dBm}} = 30 + 10 \log_{10} (P_{\text{signal}} \text{ (en Watts)})$$

Il existe aussi d'autres mesures de puissance (e.g., dBrn en téléphonie) et de tension (e.g., dBmV en télévision) en décibels :

$$V_{\text{dBmV}} = 20 \log_{10} \left( \frac{V_{\text{signal-RMS}}}{10^{-3}} \right) \quad [\text{dBmV}]$$

$$0\text{dBmV} \Leftrightarrow -48.75\text{dBm} \text{ (dans une charge de } 75 \Omega \text{)}$$

**Définition**(gain de puissance en décibels d'un circuit) :

Soit un signal  $x(t)$  de puissance moyenne  $P_{\text{entrée}}$  appliqué à l'entrée d'un circuit et  $y(t)$  le signal à sa sortie de puissance  $P_{\text{sortie}}$ . Le gain de puissance en décibels de ce circuit est donnée par :

$$\gamma_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \left( \frac{P_{\text{sortie}}}{P_{\text{entrée}}} \right) \quad [\text{dB}]$$

Si le circuit est résistif alors le gain peut s'exprimer par :

$$\gamma_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \left( \frac{V_{\text{sortie-RMS}}}{V_{\text{entrée-RMS}}} \right) + 10 \log_{10} \left( \frac{R_{\text{entrée}}}{R_{\text{sortie}}} \right) \quad [\text{dB}]$$

$$\gamma_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \left( \frac{I_{\text{sortie-RMS}}}{I_{\text{entrée-RMS}}} \right) + 10 \log_{10} \left( \frac{R_{\text{sortie}}}{R_{\text{entrée}}} \right) \quad [\text{dB}]$$

**Définition**(rapport signal-à-bruit en décibels) :

Le rapport signal-à-bruit en décibels d'un signal  $s(t)$  de puissance moyenne  $P_{\text{signal}}$  et de bruit  $n(t)$  de puissance  $P_{\text{bruit}}$  est :

$$SNR_{\text{dB}} = (S/N)_{\text{dB}} = 10 \log_{10} SNR = 10 \log_{10} (S/N)$$

$$SNR_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \left( \frac{P_{\text{signal}}}{P_{\text{bruit}}} \right) = 10 \log_{10} \left( \frac{\langle s^2(t) \rangle}{\langle n^2(t) \rangle} \right) \quad [\text{dB}]$$

On peut aussi le définir à partir des valeurs efficaces :

$$SNR_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \left( \frac{V_{\text{signal-RMS}}}{V_{\text{bruit-RMS}}} \right) \quad [\text{dB}]$$

## 2.6 Dualité temps-fréquence et théorème de Parseval

Considérons l'expression de l'énergie d'un signal  $x(t)$  dans le domaine du temps :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t) dt \quad (2.26)$$

La transformée de Fourier de la fonction temporelle  $x^*(t)$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x^*(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (\text{angles négatifs } x^*(t) \text{ et } e^{-j2\pi ft}) \quad (2.27) \\ \mathcal{F}[x^*(t)] &= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j2\pi ft} dt \right]^* \quad (\text{angles positifs } x(t) \text{ et } e^{j2\pi ft}) \\ \mathcal{F}[x^*(t)] &= [X(-f)]^* = X^*(-f) \end{aligned}$$

Maintenant, en prenant la transformée de Fourier inverse à gauche et à droite de l'égalité, on obtient la fonction  $x^*(t)$  :

$$\begin{aligned} x^*(t) &= \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[x^*(t)]] \quad (2.28) \\ x^*(t) &= \mathcal{F}^{-1}[X^*(-f)] \\ x^*(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X^*(-f)e^{j2\pi ft} df \end{aligned}$$

qui est la définition de la transformée inverse.

En intégrant (dans le sens inverse) de  $f = +\infty$  à  $f = -\infty$ , on obtient :

$$x^*(t) = - \int_{+\infty}^{-\infty} X^*(f)e^{-j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f)e^{-j2\pi ft} df \quad (2.29)$$

En remplaçant  $x^*(t)$  dans l'expression de l'énergie  $E$  :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f)e^{-j2\pi ft} df dt \quad (2.30)$$

et en changeant l'ordre d'intégration (en supposant que cela soit possible pour la fonction qui nous intéresse) :

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt}_{\text{transformée de Fourier}} df \quad (2.31) \\ E &= \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f)X(f) df \end{aligned}$$

L'énergie d'un signal  $x(t)$  peut donc être déterminée par sa représentation dans le domaine fréquentiel, c'est-à-dire son spectre de fréquence  $X(f)$ . Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Parseval.

**Théorème (Parseval) :**

L'énergie d'un signal  $x(t)$  peut s'exprimer en fonction de son spectre  $X(f)$  par la relation suivante :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f)X(f) df$$

ou encore par :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

### Exemple 2.8 : Énergie d'un signal exponentiel décroissant

Reprenons l'exemple où  $x(t) = Ae^{-\alpha t}u(t)$ . On désire calculer l'énergie de ce signal à l'aide de théorème de Parseval. Celui-ci stipule que :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f)X(f) df$$

où  $X(f)$  est donné par :

$$\begin{aligned} X(f) &= \mathcal{F}[x(t)] \\ X(f) &= \mathcal{F}[Ae^{-\alpha t}u(t)] \\ X(f) &= A\mathcal{F}[e^{-\alpha t}u(t)] \\ X(f) &= A\left(\frac{1}{\alpha + j2\pi f}\right) \end{aligned}$$

Le module de  $X(f)$  est alors égal à :

$$|X(f)| = \frac{A}{\sqrt{\alpha^2 + (2\pi f)^2}}$$

et son énergie est :

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \\ E &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{A}{\sqrt{\alpha^2 + (2\pi f)^2}} \right]^2 df \\ E &= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} df \end{aligned}$$

or  $\int \frac{1}{a^2+b^2z^2} dz = \left(\frac{1}{ab}\right) \arctan\left(\frac{bz}{a}\right)$  et :

$$\begin{aligned} E &= A^2 \left(\frac{1}{\alpha 2\pi}\right) \arctan\left(\frac{2\pi f}{\alpha}\right) \Bigg|_{-\infty}^{\infty} \\ E &= \frac{A^2}{2\pi\alpha} [\arctan(\infty) - \arctan(-\infty)] \\ E &= \frac{A^2}{2\pi\alpha} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

Donc l'énergie de  $x(t) = Ae^{-\alpha t}u(t)$  est :

$$E = \frac{A^2}{2\alpha}$$

ce qui est en accord avec le résultat du calcul de l'énergie du calcul de l'énergie de  $x(t)$  fait avec la représentation temporelle.

## 2.7 Densité spectrale de puissance d'un signal périodique

Les signaux périodiques sont des signaux à énergie infinie mais à puissance finie ("power signals"), c'est-à-dire que  $0 < P_x < \infty$ .

Pour déterminer la densité spectrale de puissance d'un signal périodique de période  $T_0 = \frac{1}{f_0}$ , on peut calculer sa fonction d'autocorrélation (moyenne temporelle)  $R_x(\tau)$  et faire la transformée de Fourier directe :

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) x^*(t - \tau) dt \quad (2.32)$$

$$R_x(\tau) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kT_0} \int_{-\frac{kT_0}{2}}^{\frac{kT_0}{2}} x(t) x^*(t - \tau) dt \quad (\text{périodicité})$$

$$R_x(\tau) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{kT_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) x^*(t - \tau) dt \quad (\text{intégrale sur une période})$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) x^*(t - \tau) dt$$

Or le signal périodique  $x(t)$  peut être décomposé en série exponentielle complexe de Fourier :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi \frac{n}{T_0} t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t} \quad (2.33)$$

On peut alors réécrire l'expression de la fonction d'autocorrélation  $R_x(\tau)$  comme suit :

$$\begin{aligned}
R_x(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) x^*(t - \tau) dt & (2.34) \\
R_x(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m^* \left[ e^{j2\pi m f_0 (t-\tau)} \right]^* dt \\
R_x(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t} c_m^* e^{-j2\pi m f_0 (t-\tau)} dt \\
R_x(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n c_m^* e^{j2\pi m f_0 \tau} e^{j2\pi(n-m)f_0 t} dt \\
R_x(\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n c_m^* e^{j2\pi m f_0 \tau} \underbrace{\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{j2\pi(n-m)f_0 t} dt}_{(=1 \text{ lorsque } m = n)}
\end{aligned}$$

La fonction d'autocorrélation  $R_x(\tau)$  d'un signal périodique  $x(t)$  de période  $T_0 = \frac{1}{f_0}$

$$R_x(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n c_n^* e^{j2\pi n f_0 \tau} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 e^{j2\pi n f_0 \tau} \quad (2.35)$$

La densité spectrale de puissance,  $P_x(f)$ , est obtenue par la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation  $R_x(\tau)$  :

$$\begin{aligned}
P_x(f) &= \mathcal{F}[R_x(\tau)] = \mathcal{F}\left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 e^{j2\pi n f_0 \tau} \right] & (2.36) \\
P_x(f) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \mathcal{F}\left[ e^{j2\pi n f_0 \tau} \right] \\
P_x(f) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \delta(f - n f_0)
\end{aligned}$$

La densité spectrale de puissance,  $P_x(f)$ , est donc un spectre discret (spectre de lignes) dont les composantes sont égales à  $|c_n|^2$  (en  $V^2$  par Hertz, ou en Watts par Hertz dans une impédance de  $1\Omega$ ).

La puissance  $P_x$  de ce signal périodique est donnée par :

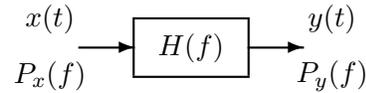
$$\begin{aligned}
 P_x &= \int_{-\infty}^{\infty} P_x(f) df & (2.37) \\
 P_x &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) df \\
 P_x &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) df \\
 P_x &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad \text{en } V^2 \text{ ou en Watts dans } 1\Omega
 \end{aligned}$$

---

**Exemple 2.9 :** Densité spectrale de puissance d'un signal à la sortie d'un système linéaire invariant dans le temps

---

Soit  $x(t)$  un signal périodique de période  $T_0$  et  $P_x(f)$  sa densité spectrale de puissance. Ce signal est appliqué à l'entrée d'un système linéaire invariant dans le temps de réponse impulsionnelle  $h(t)$  et de fonction de transfert  $H(f) = \mathcal{F}[h(t)]$  :



On désire calculer la densité spectrale de puissance du signal  $y(t)$  à la sortie du système linéaire, i.e.  $P_y(f)$ , ainsi que sa puissance totale,  $P_y$ .

Le signal  $y(t)$  est donné par la convolution de signal  $x(t)$  par la réponse impulsionnelle du système :

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau$$

La fonction d'autocorrélation (moyenne temporelle) de la sortie  $y(t)$  est, par définition :

$$\begin{aligned}
 R_y(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) y^*(t - \tau) dt \\
 R_y(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) x(t - \sigma) d\sigma \right] \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) x(t - \xi - \tau) d\xi \right]^* dt \\
 R_y(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) x(t - \sigma) d\sigma \right] \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\xi) x^*(t - \xi - \tau) d\xi \right] dt
 \end{aligned}$$

En posant  $\zeta = t - \sigma$ , on aura  $t = \zeta + \sigma$  et :

$$\begin{aligned}
 R_y(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) x(\zeta) d\sigma \right] \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\xi) x^*(\zeta + \sigma - \xi - \tau) d\xi \right] dt \\
 R_y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) h^*(\xi) \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}-\sigma}^{\frac{T}{2}-\sigma} [x(\zeta) x^*(\zeta + \sigma - \xi - \tau) d\zeta] \right\} d\sigma d\xi
 \end{aligned}$$

Cependant, par définition de la fonction d'autocorrélation (moyenne temporelle) :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}-\sigma}^{\frac{T}{2}-\sigma} [x(\zeta) x^*(\zeta + \sigma - \xi - \tau) d\zeta] \triangleq R_x(-\sigma + \xi + \tau)$$

Donc,

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) h^*(\xi) \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}-\sigma}^{\frac{T}{2}-\sigma} [x(\zeta) x^*(\zeta + \sigma - \xi - \tau) d\zeta] \right\} d\sigma d\xi$$

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) h^*(\xi) R_x(-\sigma + \xi + \tau) d\sigma d\xi$$

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\xi + \tau - \sigma) h(\sigma) d\sigma \right] h^*(\xi) d\xi$$

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} [R_x(\xi + \tau) * h(\xi + \tau)] h^*(\xi) d\xi$$

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)$$

La densité spectrale de puissance à la sortie,  $P_y(f)$ , est donnée par :

$$P_y(f) = \mathcal{F}[R_y(\tau)]$$

$$P_y(f) = \mathcal{F}[R_x(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)]$$

$$P_y(f) = \mathcal{F}[R_x(\tau)] \mathcal{F}[h(\tau)] \mathcal{F}[h^*(-\tau)]$$

et finalement :

$$P_y(f) = P_x(f) H(f) H^*(f) = P_x(f) |H(f)|^2$$

La densité spectrale de puissance d'un signal périodique étant

$$P_x(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

Et la densité spectrale de puissance de  $y(t)$  est :

$$P_y(f) = P_x(f) |H(f)|^2 = |H(f)|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

La densité spectrale de puissance et la puissance totale du signal à la sortie sont :

$$P_y(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \left| H\left(\frac{n}{T_0}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) \quad (V^2/\text{Hz ou Watts/Hz dans } 1\Omega)$$

$$P_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \left| H\left(\frac{n}{T_0}\right) \right|^2 \quad (V^2 \text{ ou Watts dans } 1\Omega)$$

## 2.8 Transformée de Hilbert

Soit  $x(t)$  une fonction, ou un signal, dans le domaine temporel dont la transformée de Fourier est donnée par  $X(f)$ .

**Définition**(transformée de Hilbert) :

On définit la *transformée de Hilbert* d'un signal  $x(t)$  par l'expression suivante :

$$x_h(t) \triangleq \mathcal{H}[x(t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

On peut également récupérer le signal original  $x(t)$  à partir de la *transformée de Hilbert inverse* de  $x_h(t)$ , c'est-à-dire :

$$x(t) \triangleq \mathcal{H}^{-1}[x_h(t)] = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_h(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

Tout comme pour la transformée de Fourier, on peut considérer la *dualité* de la paire : transformée directe et transformée inverse de Hilbert :

$$x(t) \underset{\text{Hilbert}}{\rightleftharpoons} x_h(t)$$

Ici cependant, on note que la transformée de Hilbert et son inverse sont définies uniquement dans le domaine du temps. On remarque également que la transformée de Hilbert est en fait une convolution de la fonction  $x(t)$  avec la fonction  $\frac{1}{\pi t}$  :

$$x_h(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \frac{1}{\pi(t - \tau)} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (2.38)$$

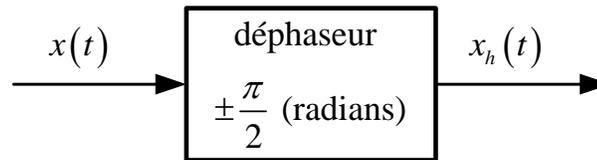
Dans le domaine fréquentiel, la transformée de Hilbert peut aussi se représenter comme étant le produit de la fonction  $X(f)$  et la transformée de Fourier de  $\frac{1}{\pi t}$ , i.e.  $\mathcal{F}\left[\frac{1}{\pi t}\right] = -j \operatorname{sgn}(f)$  :

$$\begin{aligned} X_h(f) &= \mathcal{F}[x_h(t)] = \mathcal{F}[\mathcal{H}[x(t)]] \\ X_h(f) &= \mathcal{F}\left[x(t) * \frac{1}{\pi t}\right] = \mathcal{F}[x(t)] \mathcal{F}\left[\frac{1}{\pi t}\right] \\ X_h(f) &= X(f) (-j \operatorname{sgn}(f)) \\ X_h(f) &= -j \operatorname{sgn}(f) X(f) \end{aligned} \quad (2.39)$$

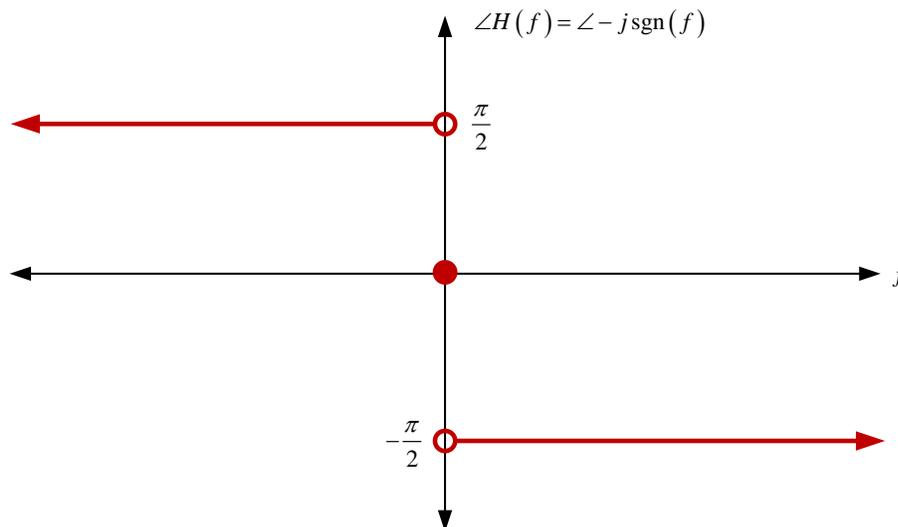
la fonction *signe*,  $\operatorname{sgn}(f)$ , étant définie par :

$$\operatorname{sgn}(f) = \begin{cases} -1, & \text{pour } f < 0, \\ 0, & \text{pour } f = 0, \text{ et} \\ 1, & \text{pour } f > 0. \end{cases} \quad (2.40)$$

La transformée de Hilbert a donc pour effet de déphaser de  $+\frac{\pi}{2}$  radians (ou  $+90^\circ$ ) les composantes du signal  $X(f)$  aux fréquences négatives et de  $-\frac{\pi}{2}$  radians (i.e.  $-90^\circ$ ) les composantes aux fréquences positives, tel qu'illustré ci-après :



$$H(f) = \begin{cases} e^{j\frac{\pi}{2}}, & \text{pour } f < 0, \\ 0, & \text{pour } f = 0, \text{ et} \\ e^{-j\frac{\pi}{2}}, & \text{pour } f > 0. \end{cases} \quad (2.41)$$



### 2.8.1 Applications de la transformée de Hilbert

On note parmi les applications de la transformée de Hilbert :

- la génération de signaux requérant une sélectivité de phase telle que la modulation d'amplitude à bande latérale unique (BLU) ou SSB (*Single Sideband*), et
- la représentation complexe des signaux en bande de base.

---

#### Exemple 2.10 : Transformée de Hilbert de la fonction cosinus

---

Soit  $g(t)$  une fonction du temps définie par :

$$g(t) = A \cos(2\pi f_c t)$$

On sait que la transformée de Fourier de  $g(t)$  est donnée par :

$$G(f) = \frac{A}{2} [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)]$$

Si on applique la transformée de Hilbert, dans sa forme fréquentielle, à ce signal, on obtient :

$$\begin{aligned} G_h(f) &= -j \operatorname{sgn}(f) G(f) \\ G_h(f) &= -j \operatorname{sgn}(f) \frac{A}{2} \left[ \underbrace{\delta(f - f_c)}_{\text{Dirac à } f = +f_c} + \underbrace{\delta(f + f_c)}_{\text{Dirac à } f = -f_c} \right] \\ G_h(f) &= \frac{A}{2j} [\delta(f - f_c) - \delta(f + f_c)] \end{aligned}$$

ce qui n'est en fait que la transformée de Fourier de la sinusoïde correspondante, à savoir :

$$g_h(t) = A \sin(2\pi f_c t)$$

### 2.8.2 Propriétés de la transformée de Hilbert

On suppose ici que la fonction  $x(t)$  est une fonction réelle du temps.

**Propriété 1** La transformée de Hilbert  $x_h(t)$  a le même spectre d'amplitude  $|X_h(t)|$  que celui du signal original  $x(t)$ , c'est-à-dire  $|X(t)|$ .

On sait que si

$$\begin{aligned} x(t) &\Leftrightarrow X(f) \quad \text{alors} \\ x_h(t) &\Leftrightarrow X_h(f) = -j \operatorname{sgn}(f) X(f). \end{aligned}$$

Les spectres d'amplitude sont, respectivement pour  $x(t)$  et sa transformée de Hilbert  $x_h(t)$ ,  $|X(t)|$  et  $|X_h(t)|$  où :

$$\begin{aligned} |X_h(t)| &= \left| \underbrace{-j}_{-\frac{\pi}{2}} \underbrace{\operatorname{sgn}(f)}_{=\pm 1} X(f) \right| \\ |X_h(t)| &= |X(f)|. \end{aligned}$$

Conséquemment, si un signal  $x(t)$  est limité en fréquence, alors sa transformée de Hilbert  $x_h(t)$ , est aussi limitée en fréquence.

**Propriété 2** Si la transformée de Hilbert de  $x(t)$  est égale à  $x_h(t)$ , alors la transformée de Hilbert de  $x_h(t)$  est égale à  $-x(t)$ , i.e.

$$\mathcal{H} \{ \mathcal{H} [x(t)] \} = -x(t)$$

Considérons encore une fois l'expression de la transformée de Hilbert dans le domaine fréquentiel :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\{\mathcal{H}[X(f)]\} &= \mathcal{H}[X_h(f)] \\ \mathcal{H}\{\mathcal{H}[X(f)]\} &= -j \operatorname{sgn}(f)X_h(f) \\ \mathcal{H}\{\mathcal{H}[X(f)]\} &= [-j \operatorname{sgn}(f)][-j \operatorname{sgn}(f)]X(f) \\ \mathcal{H}\{\mathcal{H}[X(f)]\} &= j^2 \operatorname{sgn}^2(f)X(f) \\ \mathcal{H}\{\mathcal{H}[X(f)]\} &= -X(f)\end{aligned}$$

Si on prends la transformée de Fourier inverse de part et d'autre de cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{H}\{\mathcal{H}[X(f)]\}\} &= \mathcal{F}^{-1}\{-X(f)\} \\ \mathcal{H}\{\mathcal{H}[x(t)]\} &= -x(t).\end{aligned}$$

Dans le domaine du temps, on obtient donc :

$$\mathcal{H}\{\mathcal{H}[x(t)]\} = x(t) * \frac{1}{\pi t} * \frac{1}{\pi t} = -x(t).$$

**Propriété 3** Une fonction  $x(t)$  et sa transformée de Hilbert  $x_h(t)$  sont orthogonales, c'est-à-dire que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)x_h(t) dt = 0.$$

## 2.9 Pré-enveloppe d'un signal

**Définition**(*pré-enveloppe*) :

Soit  $x(t)$  un signal réel. La pré-enveloppe  $x_+(t)$  (ou, plus précisément la pré-enveloppe positive) de  $x(t)$  est définie par :

$$x_+(t) = x(t) + jx_h(t)$$

où  $x_h(t)$  est la transformée de Hilbert de  $x(t)$ .

La pré-enveloppe  $x_+(t)$  est donc une fonction complexe dont la partie réelle est la fonction  $x(t)$  elle-même alors que sa partie imaginaire est la transformée de Hilbert  $x_h(t)$ .

La transformée de Fourier  $X_+(f)$  de la pré-enveloppe (positive)  $x_+(t)$ , est donnée

par :

$$\begin{aligned}
 X_+(f) &= \mathcal{F}[x_+(t)] & (2.42) \\
 X_+(f) &= \mathcal{F}[x(t) + jx_h(t)] \\
 X_+(f) &= \mathcal{F}[x(t)] + j\mathcal{F}[x_h(t)] \\
 X_+(f) &= X(f) + jX_h(f) \\
 X_+(f) &= X(f) + j[-j \operatorname{sgn}(f)] X(f) \\
 X_+(f) &= X(f) + \operatorname{sgn}(f)X(f)
 \end{aligned}$$

De la définition de la fonction signe,  $\operatorname{sgn}(f)$ , on obtient donc pour  $X_+(f)$  :

$$X_+(f) = \begin{cases} 0, & \text{pour } f < 0, \\ X(f), & \text{pour } f = 0 \text{ et} \\ 2X(f), & \text{pour } f > 0. \end{cases} \quad (2.43)$$

**Remarque 1** On peut calculer la pré-enveloppe positive  $x_+(t)$  d'un signal  $x(t)$  en déterminant sa transformée de Hilbert :

$$x_+(t) = x(t) + jx_h(t)$$

**Remarque 2** On peut aussi déterminer la pré-enveloppe positive  $x_+(t)$  en calculant la transformée de Fourier inverse de  $X(f)$  :

$$\begin{aligned}
 x_+(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X_+(f) e^{j2\pi ft} df \\
 x_+(t) &= 2 \int_0^{\infty} X_+(f) e^{j2\pi ft} df
 \end{aligned}$$

La pré-enveloppe positive  $x_+(t)$  résulte en un spectre  $X_+(f)$  qui n'est défini que pour les fréquences positives.

De la même manière, on peut définir une pré-enveloppe négative  $x_-(t)$  que l'on décrit comme :

$$x_-(t) \triangleq x(t) - jx_h(t) \quad (2.44)$$

Cette pré-enveloppe négative  $x_-(t)$  est donc le conjugué complexe de la pré-enveloppe positive  $x_+(t)$ , c'est-à-dire :

$$x_-(t) = x_+^*(t) \quad (2.45)$$

car  $x_+^*(t) = [x(t) + jx_h(t)]^* = [x(t) - jx_h(t)]$ . Quant au spectre  $X_-(f)$  de la pré-enveloppe négative  $x_-(t)$ , celui-ci se définit comme suit :

$$\begin{aligned}
 X_-(f) &= \mathcal{F}[x_-(t)] & (2.46) \\
 X_-(f) &= \mathcal{F}[x(t) - jx_h(t)] \\
 X_-(f) &= \mathcal{F}[x(t)] - j\mathcal{F}[x_h(t)] \\
 X_-(f) &= X(f) - j[-j \operatorname{sgn}(f)] X(f) \\
 X_-(f) &= X(f) - \operatorname{sgn}(f)X(f)
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$X_-(f) = \begin{cases} 2X(f), & \text{pour } f < 0, \\ X(f), & \text{pour } f = 0 \text{ et} \\ 0, & \text{pour } f > 0. \end{cases} \quad (2.47)$$

Maintenant, si on fait la somme des spectres  $X_+(f)$  et  $X_-(f)$  des pré-enveloppes positive et négative, on obtient :

$$X_+(f) + X_-(f) = 2X(f) \quad (2.48)$$

ou, dans le domaine du temps :

$$x_+(t) + x_-(t) = 2x(t) \quad (2.49)$$

car  $x_+(t) + x_-(t) = x(t) + jx_h(t) + x(t) - jx_h(t) = 2x(t)$ .

## 2.10 Représentation complexe des signaux en bande de base

On considère un signal  $x(t)$  en bande passante comme étant un signal dont la transformée de Fourier  $X(f)$  est centrée autour d'une fréquence porteuse  $\pm f_c$  et *non-négligeable* dans sa bande passante de largeur de bande  $2W$ . En général, en fait presque toujours, on suppose que  $W \ll f_c$ .

L'*enveloppe complexe* d'un signal  $x(t)$ , dénotée par  $\tilde{x}(t)$ , peut être définie en fonction de sa pré-enveloppe positive  $x_+(t)$ , ou de sa pré-enveloppe négative  $x_-(t)$ , en faisant une *translation en fréquence* de son spectre. La figure montre comment on passe du spectre du signal original en bande passante,  $X(f)$ , au spectre de la pré-enveloppe,  $X_+(f)$ , (ici positive) puis, enfin, au spectre de l'enveloppe complexe  $\tilde{X}(f)$  en bande de base.

La pré-enveloppe positive  $x_+(t)$  est le résultat d'un décalage en fréquence de  $f_c$  de l'enveloppe complexe  $\tilde{x}(t)$  :

$$x_+(t) = \tilde{x}(t)e^{j2\pi f_c t} \quad (2.50)$$

Le signal en bande passante  $x(t)$  peut être exprimé en fonction de la pré-enveloppe  $x_+(t)$  :

$$x(t) = \Re[x_+(t)] = \Re[x(t) + jx_h(t)] \quad (2.51)$$

et donc peut s'exprimer en fonction de l'enveloppe complexe  $\tilde{x}(t)$  :

$$x(t) = \Re[\tilde{x}(t)e^{j2\pi f_c t}] \quad (2.52)$$

Donc, même si le signal en bande passante  $x(t)$  est un signal réel, sa représentation en bande de base à l'aide de son enveloppe complexe  $\tilde{x}(t)$  est complexe et celle-ci peut être décomposée en une partie réelle  $x_I(t)$  et une partie imaginaire  $x_Q(t)$  :

$$\tilde{x}(t) = x_I(t) + jx_Q(t) \quad (2.53)$$

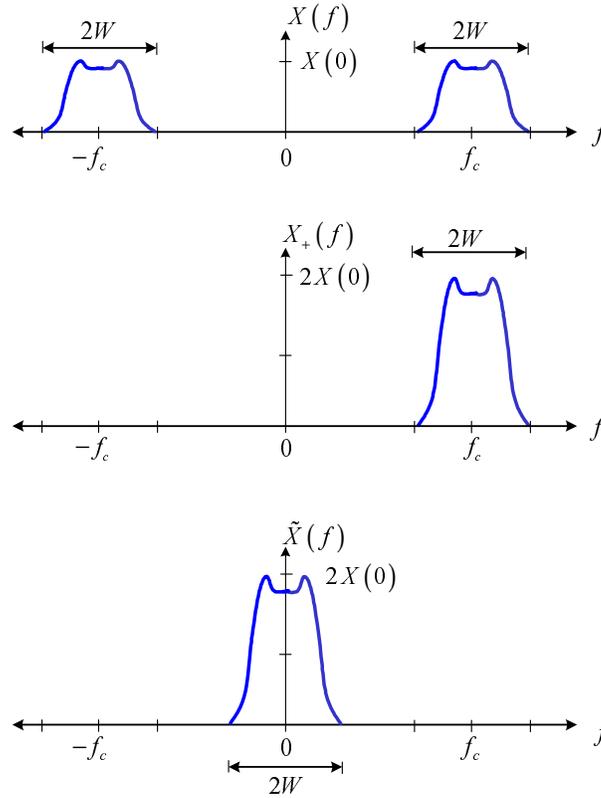


FIGURE 2.7: Spectres d'un signal en bande de base,  $X(f)$ , de sa pré-enveloppe positive,  $X_+(f)$ , et de l'enveloppe complexe en bande de base,  $\tilde{X}(f)$ .

Le signal  $x(t)$  peut aussi s'écrire :

$$x(t) = \Re \left[ \tilde{x}(t) e^{j2\pi f_c t} \right] \quad (2.54)$$

$$x(t) = \Re \left[ x_I(t) e^{j2\pi f_c t} + j x_Q(t) e^{j2\pi f_c t} \right]$$

$$x(t) = \Re \left[ x_I(t) e^{j2\pi f_c t} \right] + \Re \left[ j x_Q(t) e^{j2\pi f_c t} \right]$$

$$x(t) = \Re \left[ x_I(t) e^{j2\pi f_c t} \right] + \Re \left[ e^{j\frac{\pi}{2}} x_Q(t) e^{j2\pi f_c t} \right]$$

$$x(t) = x_I(t) \cos(2\pi f_c t) + x_Q(t) \cos \left( 2\pi f_c t + \frac{\pi}{2} \right)$$

Donc,

$$x(t) = x_I(t) \cos(2\pi f_c t) - x_Q(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (2.55)$$

Les signaux réels  $x_I(t)$  et  $x_Q(t)$  sont appelés respectivement la *composante en phase* et la *composante en quadrature* du signal  $x(t)$ . Ce sont des fonctions réelles qui varient en fonction du temps.

On peut également représenter le signal  $x(t)$  sous forme polaire, avec un module,  $|\tilde{x}(t)|$ , et une phase,  $\varphi(t) = \angle \tilde{x}(t)$ , qui varie en fonction du temps.

$$x(t) = |\tilde{x}(t)| \cos [2\pi f_c t + \varphi(t)] \quad (2.56)$$

où :

$$|\tilde{x}(t)| = \sqrt{x_I^2(t) + x_Q^2(t)} \quad \text{et} \quad \varphi(t) = \angle \tilde{x}(t) = \tan^{-1} \left[ \frac{x_Q(t)}{x_I(t)} \right] \quad (2.57)$$

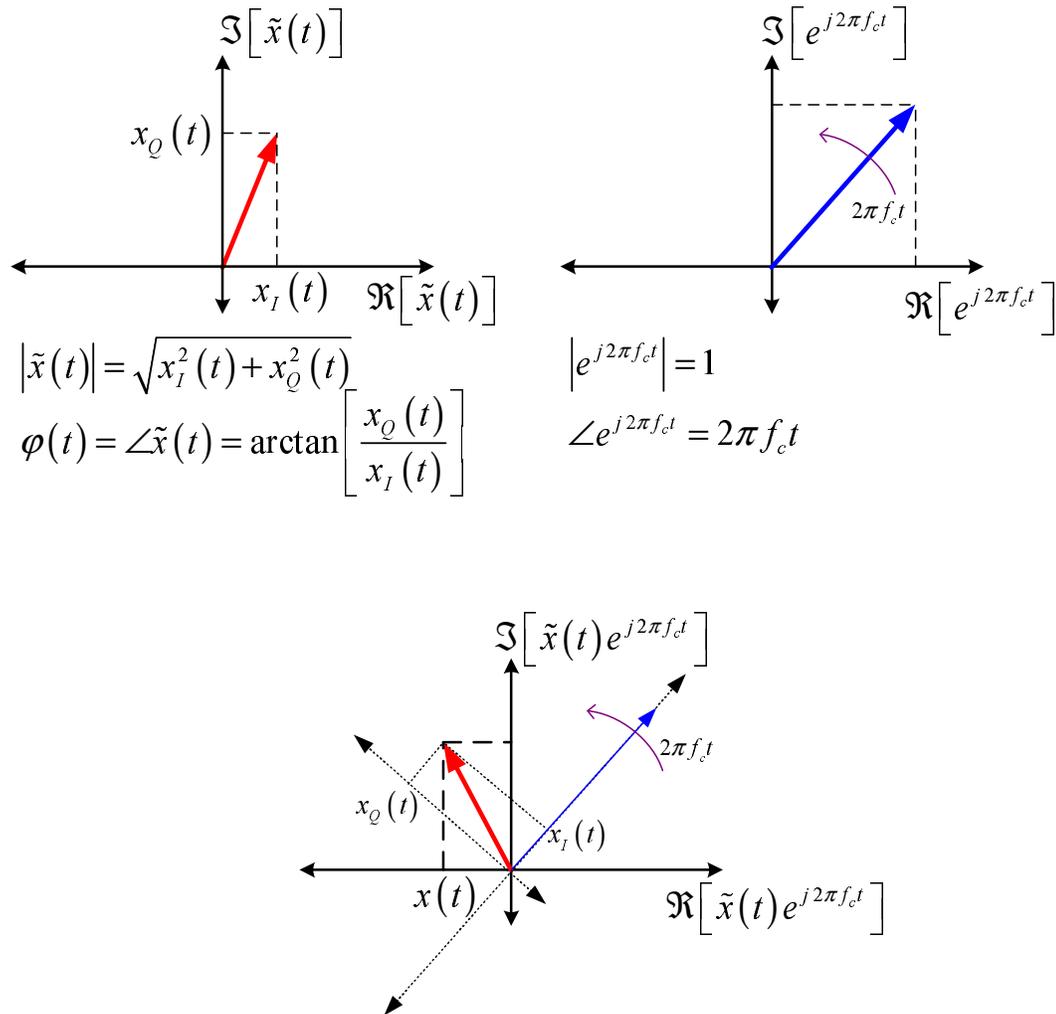


FIGURE 2.8: Représentation vectorielle d'un signal  $x(t)$  en bande passante.

