Chapitre 3

# Modulation d'amplitude

## 3.1 Modulation des signaux de télécommunication

La modulation consiste à transformer un signal $m(t)$ sous une forme qui lui permette d'être transmis dans un canal de transmission. On pense, par exemple, aux canaux de communication radioélectriques, aux canaux à fibres optiques, aux câbles coaxiaux, aux liaisons radio mobiles, aux liens satellites, etc.

Le message $m(t)$ lui-même peut être de la voix dans un système téléphonique avec une bande de fréquences allant de 300 Hz à 3.4 kHz. Ce peut être aussi un signal de télévision occupant une largeur de bande de 6 MHz (norme américaine NTSC).

La modulation permet également d'assigner des bandes de fréquences distinctes aux différents signaux afin d'éviter leur superposition (multiplexage fréquentiel). En d'autres mots, on déplace les signaux à d'autres bandes de fréquences.

La modulation peut être analogique ou numérique. Parmi les techniques de modulation analogiques, il y a :

- la modulation d'amplitude (AM : *Amplitude Modulation*) pour laquelle l'information contenue dans le message $m(t)$ vient *moduler* l'amplitude d'une porteuse (fréquence porteuse). Parmi les méthodes de modulation d'amplitude, il y a :
  - la modulation à bande latérale double sans porteuse (DSB-SC : *Double Side Band Suppressed Carrier*),
  - la modulation à bande latérale double avec porteuse (AM ou DSB-TC : *Double Side Band Transmitted Carrier*),
  - la modulation à bande latérale unique (SSB : *Single Side Band*),
  - la modulation à bande latérale résiduelle (VSB : *Vestigial Side Band*), et
  - la modulation d'amplitude en quadrature (QAM : *Quadrature Amplitude Modulation*),
- la modulation d'angle où le message $m(t)$ module soit la fréquence instantanée de la porteuse (modulation de fréquence FM : *Frequency Modulation*), soit la phase de cette porteuse (PM : *Phase Modulation*).

Parmi les méthodes de modulations numériques, il y a :

- la modulation par déplacement d'amplitude (ASK : *Amplitude Shift Keying*),

— la modulation par déplacement de phase (PSK : *Phase Shift Keying*),
— la modulation par déplacement de fréquence (FSK : *Frequency Shift Keying*).

## 3.2 Modulation d'amplitude à bande latérale double (DSB)

En modulation d'amplitude, l'information du message à transmettre (ou signal modulant), $m(t)$, est représentée par l'amplitude du message modulé $s_{DSB}(t)$.

Soit $m(t)$ le message, de largeur de bande $W$, et $c_1(t)$ la porteuse :

$$\begin{array}{lll} \textit{message :} & m(t) & \text{(limité en fréquence)} \\ \textit{porteuse :} & c_1(t) & = A_{c_1}\cos(2\pi f_c t + \theta_c) \end{array}$$

où, en général, la fréquence porteuse $f_c \gg W$ et $\theta_c$ est supposé nul. Le signal modulé $s_{DSB}(t)$ est obtenu en multipliant le message $m(t)$ avec la porteuse $c_1(t)$ :

$$\boxed{s_{DSB}(t) = A_{c_1} m(t)\cos(2\pi f_c t)} \tag{3.1}$$

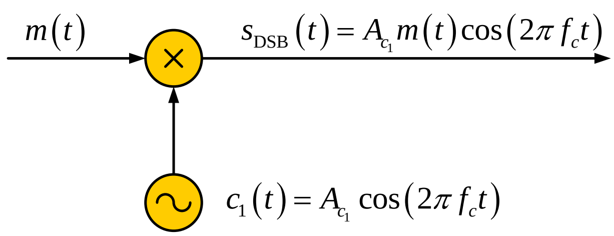



FIGURE 3.1: Modulateur d'amplitude à bande latérale double sans porteuse (DSB-SC).

À titre d'exemple, en radiodiffusion AM, la bande de fréquence du signal en bande de base est limitée à la plage de fréquences allant de 50 Hz à 15 kHz (i.e. la largeur de bande $W$ = 15 kHz alors que la fréquence porteuse $f_c$ est située dans la bande de fréquences [535 kHz, 1.705 MHz].

Dans le domaine fréquentiel, le signal modulé, $S_{DSB}(f)$, peut être exprimé en fonction du spectre du message $M(f)$ en bande de base.

$$\begin{aligned} S_{DSB}(f) &= \mathcal{F}[s_{DSB}(t)] = \mathcal{F}[m(t) \times c_1(t)] \\ S_{DSB}(f) &= \mathcal{F}[m(t)] * \mathcal{F}[c_1(t)] \\ S_{DSB}(f) &= M(f) * \mathcal{F}[A_{c_1}\cos(2\pi f_c t)] \\ S_{DSB}(f) &= M(f) * \frac{A_{c_1}}{2}[\delta(f+f_c) + \delta(f-f_c)] \end{aligned} \tag{3.2}$$

$\mathcal{F}[\,]$ indiquant la transformée de Fourier de l'argument. Le spectre du signal modulé est donc donné par :

$$\boxed{S_{DSB}(f) = \frac{A_{c_1}}{2}[M(f+f_c) + M(f-f_c)]} \tag{3.3}$$

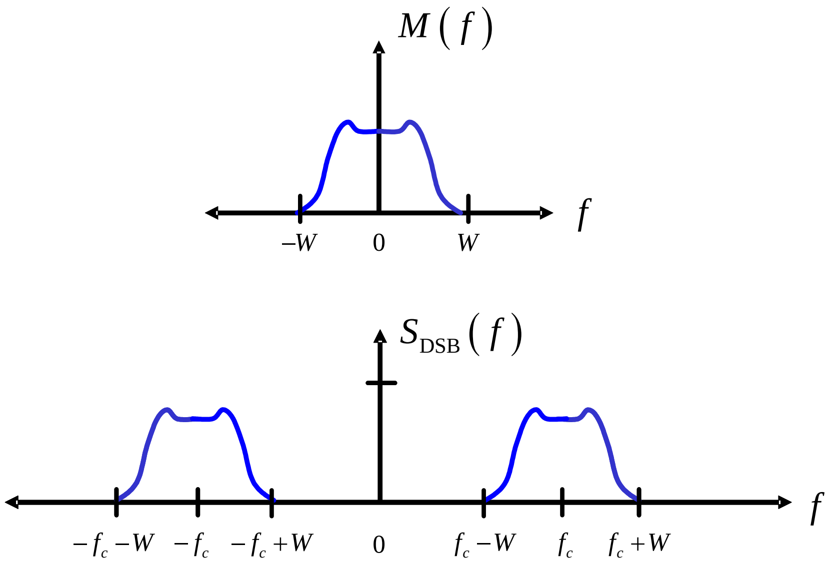



FIGURE 3.2: Spectre du signal modulé à bande latérale double, $S_{DSB}(f)$.

Dans le domaine temporel, le signal modulé à bande latérale double $s_{DSB}(t)$ a l'allure montrée à la figure 3.3 :

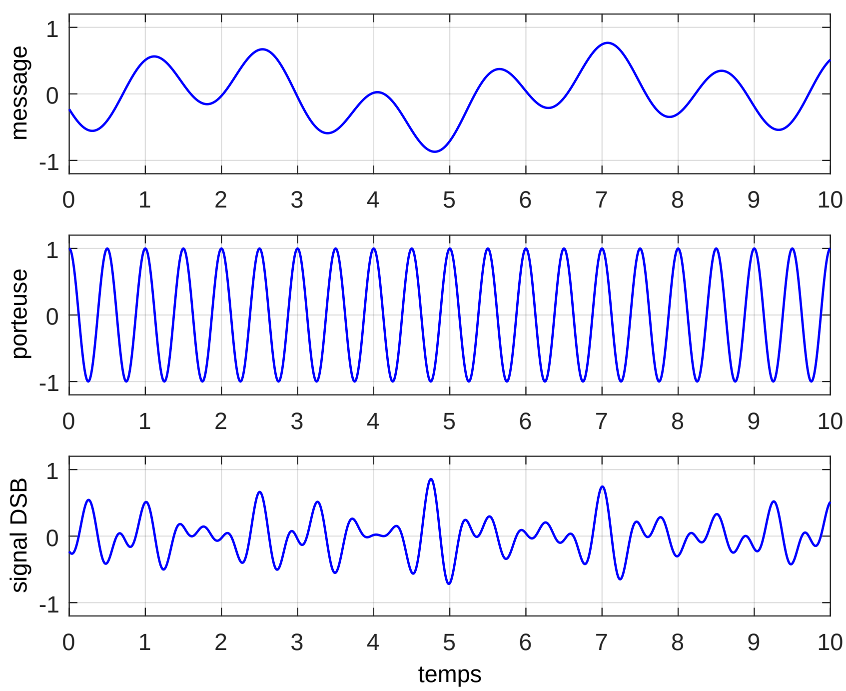



FIGURE 3.3: Exemple de signal modulé à bande latérale double, $s_{DSB}(t)$.

### 3.2.1 Détection cohérente

Au récepteur, le signal reçu $r(t)$ doit être démodulé dans la forme originale du message $m(t)$ en bande de base. Par exemple, le signal $r(t)$ reçu d'une station de radiodiffusion doit être reconverti aux fréquences audio. Si l'on suppose un canal de transmission sans atténuation, sans bruit et sans distortion (c'est-à-dire un canal idéal), alors $r(t) = s_{DSB}(t)$.

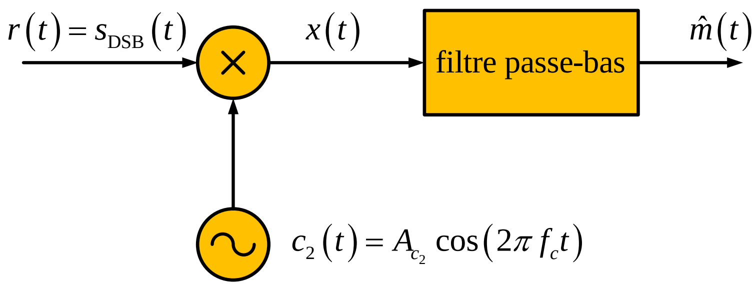



FIGURE 3.4: Démodulateur cohérent DSB.

À la figure 3.4, $\hat{m}(t)$ est l'estimé à la réception du signal original transmis $m(t)$. À la sortie du mélangeur (multiplicateur), on a un signal $x(t)$ de la forme :

$$
\begin{aligned}
x(t) &= r(t)c_2(t) = [A_{c_1} m(t)\cos(2\pi f_c t)]\, A_{c_2}\cos(2\pi f_c t) \qquad (3.4)\\
x(t) &= A_{c_1}A_{c_2} m(t)\cos^2(2\pi f_c t)\\
x(t) &= A_{c_1}A_{c_2} m(t)\frac{1}{2}[1+\cos(4\pi f_c t)]\\
x(t) &= \underbrace{\left(\frac{A_{c_1}A_{c_2}}{2} m(t)\right)}_{\text{composante en bande de base}} + \underbrace{\left(\frac{A_{c_1}A_{c_2}}{2} m(t)\cos(4\pi f_c t)\right)}_{\text{composante à } 2\ f_c}
\end{aligned}
$$

Le signal $\hat{m}(t)$ est obtenu par le filtrage du signal $x(t)$ à l'aide d'un filtre passe-bas dont la fréquence de coupure $f_{co}$ est : $W < f_{co} < f_c - W$.

En pratique, cette fréquence de coupure $f_{co}$ est légèrement supérieure à $W$ afin de laisser passer tout le message $m(t)$ sans toutefois laisser passer le bruit hors bande. $\hat{m}(t)$ est donc :

$$\hat{m}(t) = \frac{A_{c_1}A_{c_2}}{2} m(t) \qquad (3.5)$$

c'est-à-dire proportionnel au message original $m(t)$. Dans le domaine fréquentiel,

$X(f) = \mathcal{F}[x(t)]$ devient :

$$\begin{aligned}
X(f) &= \mathcal{F}[x(t)] = \mathcal{F}[m(t)c_1(t)c_2(t)] = \mathcal{F}[m(t)] * \mathcal{F}[c_1(t)] * \mathcal{F}[c_2(t)] \qquad (3.6)\\
X(f) &= M(f) * \frac{A_{c_1}}{2}[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)] * \frac{A_{c_2}}{2}[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)]\\
X(f) &= \left(\frac{A_{c_1}A_{c_2}}{4}\right) M(f) * [\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)] * [\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)]\\
X(f) &= \left(\frac{A_{c_1}A_{c_2}}{4}\right) M(f) * [\delta(f-2f_c)+2\delta(f)+\delta(f+2f_c)]\\
X(f) &= \left(\frac{A_{c_1}A_{c_2}}{4}\right) [M(f-2f_c)+2M(f)+M(f+2f_c)]
\end{aligned}$$

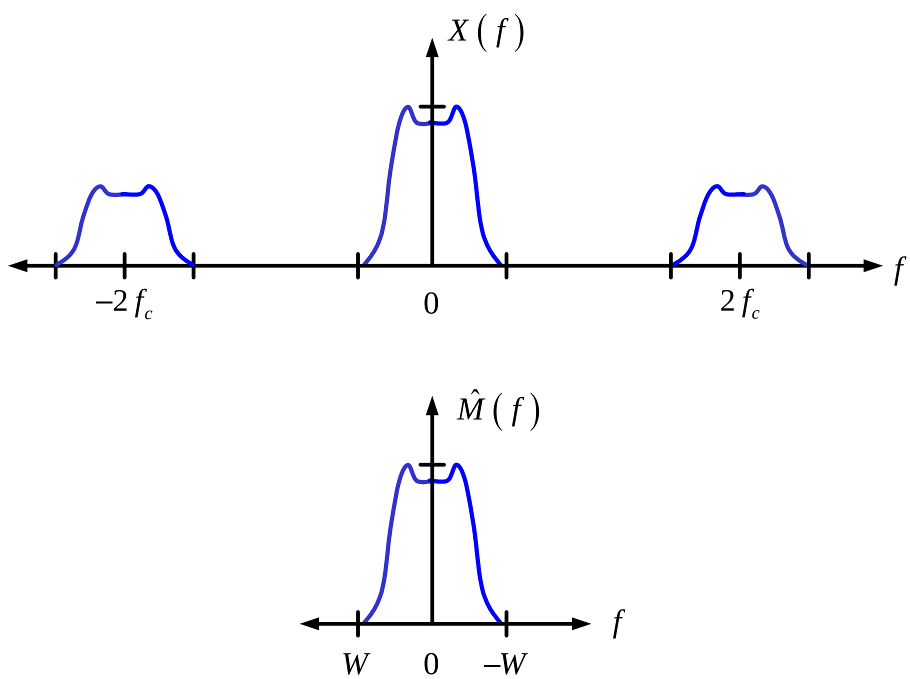



FIGURE 3.5: Spectre du signal DSB à la sortie du mélangeur.

Après filtrage passe-bas de $X(f)$, on obtient finalement $\hat{M}(f)$ :

$$\hat{M}(f) = \left(\frac{A_{c_1}A_{c_2}}{2}\right) M(f) \qquad (3.7)$$

### 3.2.2 Détection non cohérente (erreur de phase et de fréquence)

Jusqu'ici nous avons supposé que les oscillateurs locaux au transmetteur et au récepteur étaient parfaitement “synchronisés” en phase et en fréquence. Que se passe-t-il lorsque ce n'est pas le cas ?

Considérons deux oscillateurs locaux de fréquences et de phases différentes au transmetteur et au récepteur :

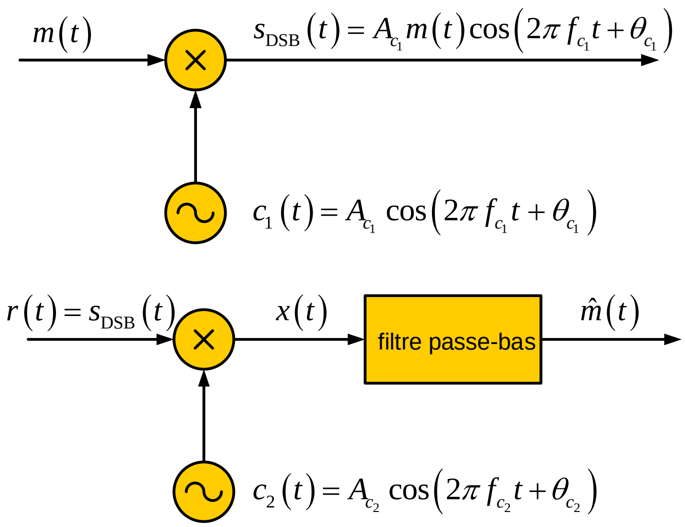



FIGURE 3.6: Oscillateurs locaux avec phases et fréquences différentes.

L'erreur de phase entre les deux oscillateurs est : $\Delta\theta_c = \theta_{c_2} - \theta_{c_1}$ et l'erreur de fréquence est : $\Delta f_c = f_{c_2} - f_{c_1}$.

Le signal modulé transmis est $s_{DSB}(t) = A_{c_1} m(t)\cos(2\pi f_{c_1} t + \theta_{c_1})$. Au récepteur, le signal $x(t)$ à la sortie du multiplicateur est donné par :

$$\begin{aligned} x(t) &= s_{DSB}(t) c_2(t) \\ x(t) &= A_{c_1} A_{c_2} m(t)\cos(2\pi f_{c_1} t + \theta_{c_1})\cos(2\pi f_{c_2} t + \theta_{c_2}) \end{aligned} \tag{3.8}$$

sachant que $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$ et posant $\alpha = 2\pi f_{c_2} t + \theta_{c_2}$ et $\beta = 2\pi f_{c_1} t + \theta_{c_1}$, $x(t)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{A_{c_1} A_{c_2}}{2} m(t)\{[\cos(2\pi f_{c_2} t + \theta_{c_2} - 2\pi f_{c_1} t - \theta_{c_1})] \\ &\quad +[\cos(2\pi f_{c_2} t + \theta_{c_2} + 2\pi f_{c_1} t + \theta_{c_1})]\} \\ x(t) &= \frac{A_{c_1} A_{c_2}}{2} m(t)\cos(2\pi \Delta f_c t + \Delta\theta_c) \\ &\quad + \frac{A_{c_1} A_{c_2}}{2} m(t)\cos[2\pi(2 f_{c_2} - \Delta f_c)t + 2\theta_{c_2} - \Delta\theta_c] \end{aligned} \tag{3.9}$$

À la sortie du filtre passe-bas, on a :

$$\hat{m}(t) = \frac{A_{c_1} A_{c_2}}{2} m(t)\cos(2\pi \Delta f_c t + \Delta\theta_c) \tag{3.10}$$

Les erreurs de phase, $\Delta\theta_c$, et de fréquence, $\Delta f_c$, affectent la détection du message $m(t)$ de la manière suivante :

1. si $\Delta\theta_c = 0$ et $\Delta f_c = 0$ alors $\hat{m}(t) = \frac{A_{c_1}A_{c_2}}{2}m(t)$ et le message est reçu correctement,
2. si $\Delta\theta_c \neq 0$ et $\Delta f_c = 0$ alors $\hat{m}(t) = \frac{A_{c_1}A_{c_2}}{2}m(t)\cos(\Delta\theta_c)$ et le message est atténué,
3. si $\Delta\theta_c = 0$ et $\Delta f_c \neq 0$ alors $\hat{m}(t) = \frac{A_{c_1}A_{c_2}}{2}m(t)\cos(2\pi\Delta f_c t)$ et le message subit une variation continue en amplitude (battement),
4. si $\Delta\theta_c \neq 0$ et $\Delta f_c \neq 0$ alors $\hat{m}(t) = \frac{A_{c_1}A_{c_2}}{2}m(t)\cos(2\pi\Delta f_c t + \Delta\theta_c)$ et il y a battement également.

Lorsque la phase et la fréquence du signal transmis sont parfaitement connues au récepteur, i.e. $\Delta\theta_c = 0$ et $\Delta f_c = 0$, on peut synchroniser les oscillateurs locaux et ainsi effectuer une détection cohérente du signal reçu $r(t)$.

## 3.3 Modulation d'amplitude AM conventionnelle

Nous avons vu que la modulation d'amplitude à bande latérale double sans porteuse (DSB-SC) nécessite un démodulateur de type cohérent. Autrement dit, l'oscillateur local au récepteur doit pouvoir se "verrouiller" sur la porteuse transmise, c'est-à-dire sans erreur de fréquence et sans erreur de phase : $\Delta f_c = 0$ et $\theta_c = 0$.

La modulation d'amplitude conventionnelle, dénotée aussi AMDSB-TC (Amplitude Modulated Double Sideband - Transmitted Carrier) permet d'éliminer la condition de réception cohérente par l'ajoût d'une porteuse superposée au signal modulé.

L'expression d'un signal AM conventionnel est donnée par :

$$\boxed{s_{AM}(t) = A_c\left[1 + k_a m(t)\right]\cos(2\pi f_c t)} \tag{3.11}$$

ou encore :

$$\boxed{s_{AM}(t) = \underbrace{A_c\cos(2\pi f_c t)}_{\text{porteuse}} + \underbrace{A_c k_a m(t)\cos(2\pi f_c t)}_{\text{signal modulé}}}$$

où $k_a$ est la sensibilité en amplitude de la modulation AM. Dans le domaine du temps, le signal modulé $s_{AM}(t)$ est tel que montré ci-après à la figure 3.7 :

Le signal en bande de base $m(t)$, multiplié par la sensibilité $k_a$, ne doit pas dépasser en valeur absolue l'unité :

$$|k_a m(t)| \leq 1 \tag{3.12}$$

Ainsi le terme $[1 + k_a m(t)]$ doit être positif. On définit $m_a$ comme étant le facteur de modulation AM (ou indice de modulation AM) :

$$\boxed{m_a = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}}} \tag{3.13}$$

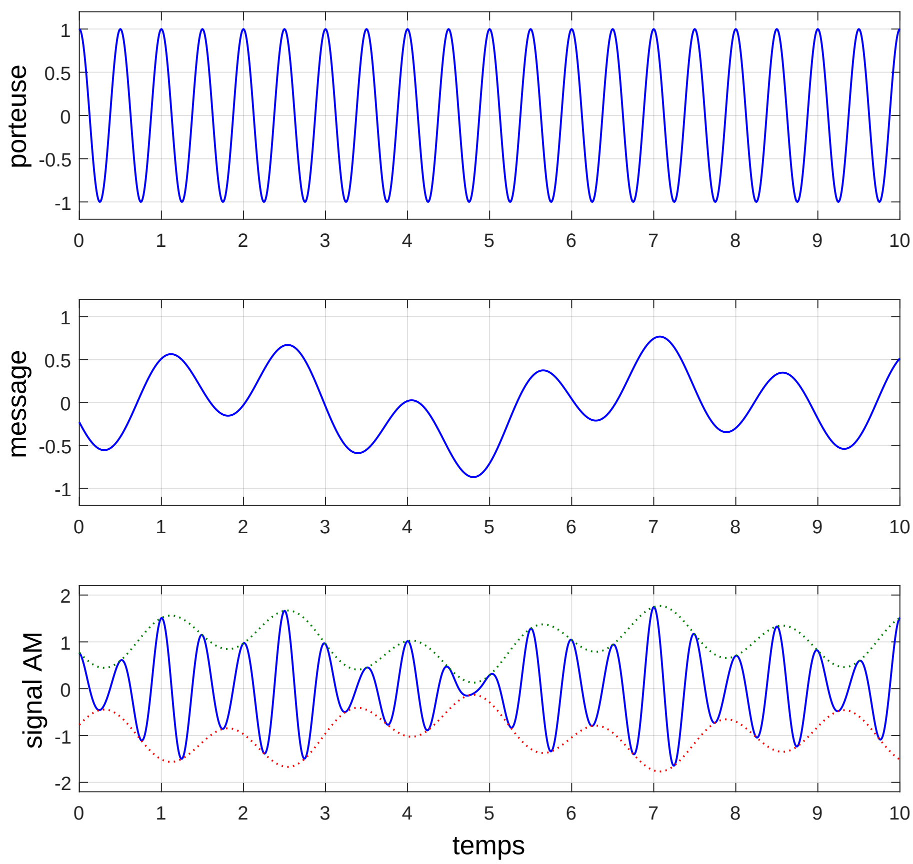



FIGURE 3.7: Signal AM conventionnel (à bande latérale double) avec porteuse.

Si on considère maintenant le signal AM dans le domaine des fréquences, on obtient le spectre suivant :

$$\begin{aligned} S_{AM}(f) &= \mathcal{F}[s_{AM}(t)] \qquad (3.14)\\ S_{AM}(f) &= \mathcal{F}[A_c \cos(2\pi f_c t) + A_c k_a m(t) \cos(2\pi f_c t)] \\ S_{AM}(f) &= A_c \mathcal{F}[\cos(2\pi f_c t)] + A_c k_a \mathcal{F}[m(t) \cos(2\pi f_c t)] \\ S_{AM}(f) &= \frac{A_c}{2}[\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c)] + A_c k_a \{\mathcal{F}[m(t)] * \mathcal{F}[\cos(2\pi f_c t)]\} \\ S_{AM}(f) &= \frac{A_c}{2}[\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c)] + \frac{A_c k_a}{2} \{M(f) * [\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c)]\} \end{aligned}$$

où $M(f) \Longleftrightarrow m(t)$. Le spectre du signal modulé AM peut donc s'exprimer comme :

$$\boxed{S_{AM}(f) = \frac{A_c}{2}[\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c)] + \frac{A_c k_a}{2}[M(f + f_c) + M(f - f_c)]} \qquad (3.15)$$

Le spectre $S_{AM}(f)$ est constitué du spectre du signal original $M(f)$ décalé de $\pm f_c$ (i.e. modulation DSB-SC) ainsi que de deux porteuses non-modulées aux mêmes fréquences $-f_c$ et $f_c$ (fig. 3.8).

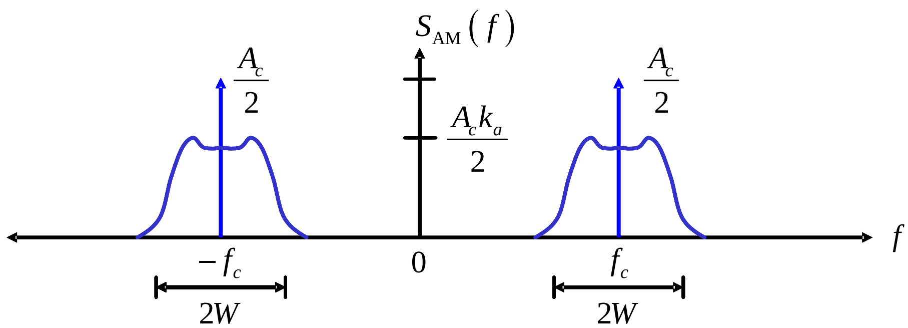



FIGURE 3.8: Spectre d'un signal AM conventionnel.

### 3.3.1 Modulateur AM

Considérons un signal AM, $s_{AM}(t)$ :

$$s_{AM}(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) + A_c k_a m(t) \cos(2\pi f_c t) \tag{3.16}$$

Le second terme de $s_{AM}(t)$ est en fait l'expression d'un signal modulé en amplitude à bande latérale double (DSB-SC ou, plus précisément, AMDSB-SC). On peut donc générer un tel signal AM de la façon suivante :

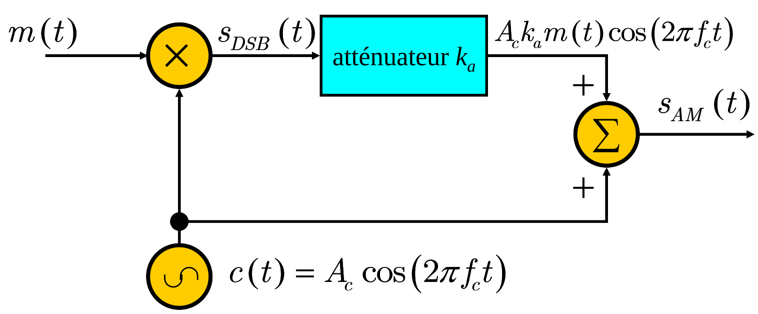



FIGURE 3.9: Modulateur AM.

On peut utiliser aussi des composantes non linéaires pour générer le signal AM. Prenons par exemple la caractéristique courant-tension d'une diode (fig. 3.10). Cette relation entre le courant et la tension peut être exprimée par un polynôme pour de petites valeurs de courant :

$$i(t) = a_1 v(t) + a_2 v^2(t) + a_3 v^3(t) + \dots \tag{3.17}$$

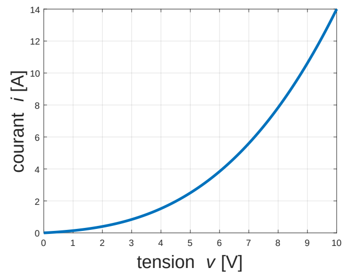



FIGURE 3.10: Caractéristique courant-tension d'une diode.

les coefficients $\{a_i\}$ étant constants.

Considérons maintenant le schéma de circuit non-linéaire montré à la figure 3.11.

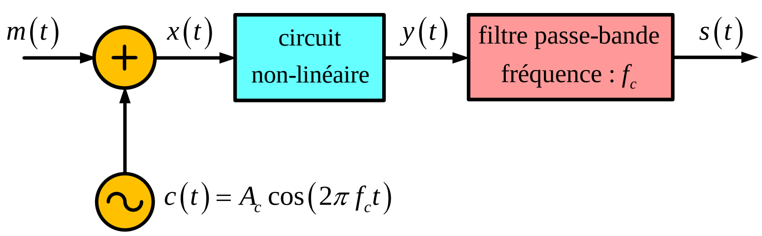



FIGURE 3.11: Circuit non-linéaire (e.g. diode).

À l'entrée du circuit non linéaire, nous avons :

$$x(t) = m(t) + A_c \cos(2\pi f_c t) \tag{3.18}$$

et à la sortie du circuit non linéaire, nous obtenons le signal $y(t)$ :

$$\begin{aligned}
y(t) &= a_1 x(t) + a_2 x^2(t) + a_3 x^3(t) + \dots \qquad (3.19)\\
y(t) &= a_1 \left[m(t) + A_c \cos(2\pi f_c t)\right] + a_2 \left[m(t) + A_c \cos(2\pi f_c t)\right]^2 + a_3 \left[m(t) + A_c \cos(2\pi f_c t)\right]^3 + \dots\\
y(t) &= a_1 m(t) + a_1 A_c \cos(2\pi f_c t) + a_2 m^2(t) + 2a_2 A_c m(t) \cos(2\pi f_c t) + a_2 A_c^2 \cos^2(2\pi f_c t) + \dots\\
y(t) &= \underbrace{a_1 m(t) + a_2 m^2(t) + \frac{a_2 A_c^2}{2}}_{\text{autour de 0 Hz}} + \underbrace{a_1 A_c \cos(2\pi f_c t) + 2a_2 A_c m(t) \cos(2\pi f_c t)}_{\text{autour de } f_c} + \underbrace{\frac{a_2 A_c^2}{2} \cos(4\pi f_c t)}_{\text{autour de } 2f_c} + \dots
\end{aligned}$$

À la sortie du filtre passe-bande centré à $f_c$ (et de largeur de bande $\geq 2W$), on obtient :

$$s(t) = a_1 A_c \left[1 + 2\frac{a_2}{a_1} m(t)\right] \cos(2\pi f_c t) \tag{3.20}$$

C'est le signal désiré $s_{AM}(t)$ avec une sensibilité $k_a = 2\frac{a_2}{a_1}$.

### 3.3.2 Détecteur d'enveloppe

La figure ci-dessous montre le schéma d'un détecteur d'enveloppe. Il consiste tout simplement en une diode et un filtre passe-bas (ici du premier ordre). Supposons que l'on applique à l'entrée de ce détecteur d'enveloppe un signal AM conventionnel, $s_{AM}(t)$. La diode $D$ ne laisse passer que les tensions positives.

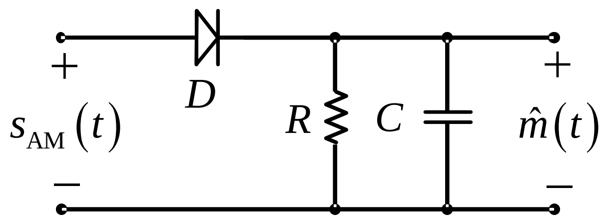



FIGURE 3.12: Détecteur d'enveloppe.

Il est important de bien choisir la valeur des composantes du filtre passe-bas. La constante de temps doit être suffisamment petite pour que la sortie du filtre puisse suivre les composantes spectrales du message $m(t)$ les plus élevées, sans toutefois "suivre" la porteuse $c(t)$ elle-même.

$$\frac{1}{f_c} \ll RC \ll \frac{1}{W} \tag{3.21}$$

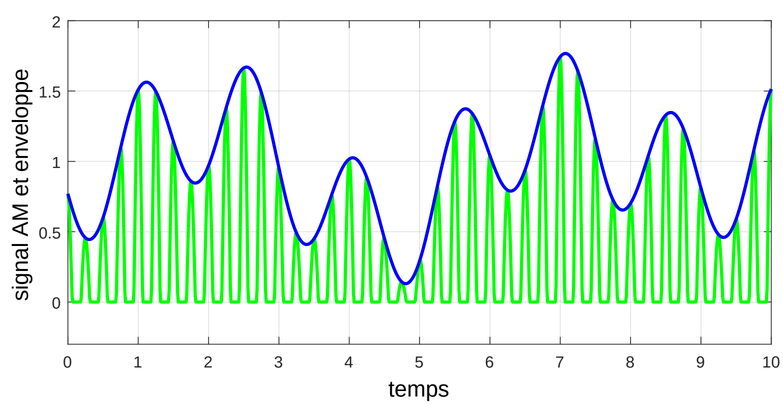



FIGURE 3.13: Signal AM redressé à la sortie du détecteur d'enveloppe.

---

**Exemple 3.1 :** Modulation AM conventionnelle

---

Considérons un signal $m(t)$ sinusoidal d'amplitude $A_m$ et de fréquence $f_m$ :

$$m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$$

On désire moduler ce signal en modulation AM conventionnelle avec un indice de modulation AM, $m_a$ :

$$\begin{aligned} s_{AM}(t) &= A_c\left[1 + k_a A_m \cos(2\pi f_m t)\right]\cos(2\pi f_c t) \\ s_{AM}(t) &= A_c\left[1 + m_a \cos(2\pi f_m t)\right]\cos(2\pi f_c t) \end{aligned}$$

où $m_a = k_a A_m$. Le signal $s_{AM}(t)$ peut s'écrire aussi :

$$s_{AM}(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) + A_c k_a A_m \cos(2\pi f_m t)\cos(2\pi f_c t)$$

Sachant que $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$, on obtient :

$$s_{AM}(t) = A_c\cos(2\pi f_c t) + \frac{A_c k_a A_m}{2}\cos\left[2\pi(f_c - f_m)t\right] + \frac{A_c k_a A_m}{2}\cos\left[2\pi(f_c + f_m)t\right]$$

Dans le domaine des fréquences, le spectre du signal $s_{AM}(t)$ est donné par :

$$\begin{aligned} S_{AM}(f) &= \mathcal{F}\left[s_{AM}(t)\right] \\ S_{AM}(f) &= \mathcal{F}\left[A_c\cos(2\pi f_c t) + \frac{A_c k_a A_m}{2}\cos\left[2\pi(f_c - f_m)t\right] + \frac{A_c k_a A_m}{2}\cos\left[2\pi(f_c + f_m)t\right]\right] \\ S_{AM}(f) &= \frac{A_c}{2}\left[\delta(f-f_c) + \delta(f+f_c)\right] + \frac{A_c k_a A_m}{4}\left[\delta(f-f_c+f_m) + \delta(f+f_c-f_m)\right] \\ &\quad + \frac{A_c k_a A_m}{4}\left[\delta(f-f_c-f_m) + \delta(f+f_c+f_m)\right] \end{aligned}$$

ou encore, sachant que l'indice de modulation $m_a = k_a A_m$ :

$$\begin{aligned} S_{AM}(f) &= \underbrace{\frac{A_c}{2}\left[\delta(f-f_c) + \delta(f+f_c)\right]}_{\text{porteuse}} + \underbrace{\frac{A_c m_a}{4}\left[\delta(f-f_c+f_m) + \delta(f+f_c-f_m)\right]}_{\text{bande latérale basse}} \\ &\quad + \underbrace{\frac{A_c m_a}{4}\left[\delta(f-f_c-f_m) + \delta(f+f_c+f_m)\right]}_{\text{bande latérale haute}} \end{aligned}$$

Le spectre d'amplitude $S_{AM}(f)$ et le spectre de puissance $S_{S_{AM}}(f)$ sont montrés à la figure 3.14.
La puissance moyenne totale $P_{\text{totale}}$ est :

$$P_{\text{totale}} = \frac{A_c^2}{2} + \frac{A_c^2 m_a^2}{4}$$

alors que la puissance moyenne de la porteuse $P_{\text{porteuse}}$ est :

$$P_{\text{porteuse}} = \frac{A_c^2}{2}$$

et la puissance moyenne des bandes latérales $P_{\text{bandes latérales}}$ est :

$$P_{\text{bandes latérales}} = \frac{A_c^2 m_a^2}{4}$$

soit $\frac{A_c^2 m_a^2}{8}$ pour la bande latérale basse et $\frac{A_c^2 m_a^2}{8}$ pour la bande latérale haute.

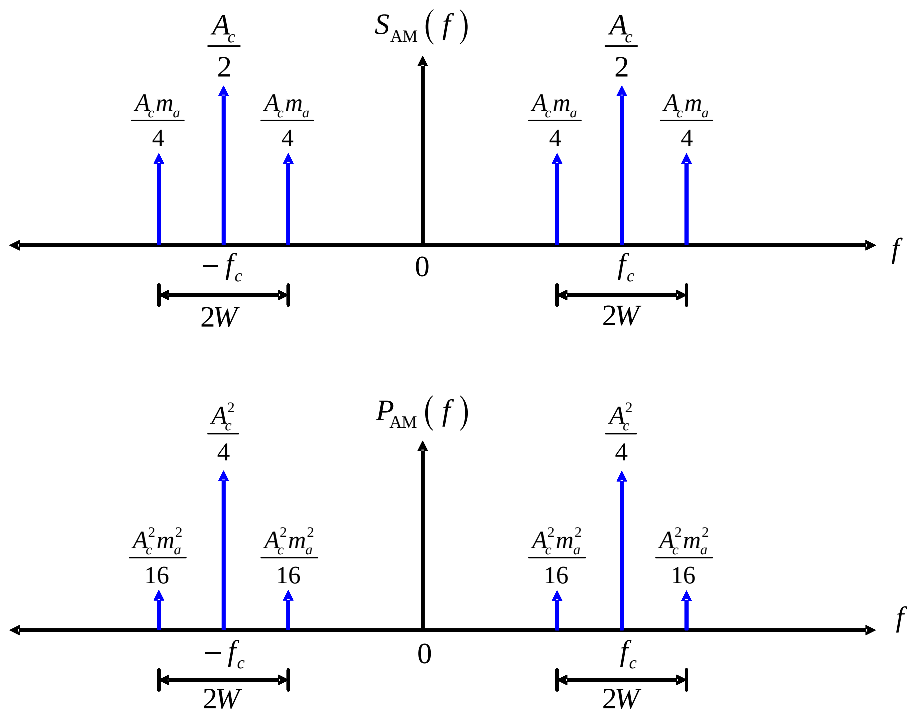



FIGURE 3.14: Spectre d'amplitude $S_{AM}(f)$ et spectre de puissance $S_{S_{AM}}(f)$.

On définit l'efficacité $\eta_{AM}$ de la modulation AM comme étant le rapport de la puissance des bandes latérales sur la puissance totale du signal AM :

$$\eta_{AM} = \frac{P_{\text{bandes latérales}}}{P_{\text{totale}}} = \frac{\frac{A_c^2 m_a^2}{4}}{\frac{A_c^2}{2} + \frac{A_c^2 m_a^2}{4}} = \frac{m_a^2}{2 + m_a^2}$$

Ainsi, pour un indice de modulation AM égal à $m_a$ où $0 \leq m_a \leq 1$, l'efficacité $\eta_{AM}$ varie de : $0 \leq \eta_{AM} \leq \frac{1}{3}$. Donc, même avec un indice de modulation de 100%, (i.e. $m_a = 1$), on aura une efficacité qui ne pourra pas dépasser $\frac{1}{3}$, ou 33% !

---

### 3.3.3 Représentation complexe en bande de base d'un signal AM

On peut comparer ce diagramme vectoriel avec celui de la modulation AM conventionnelle (voir figure 3.15). Le signal modulé, $s_{AM}(t)$, pour ce même message $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$ est de la forme (avec $\cos\phi = \frac{e^{j\phi}+e^{-j\phi}}{2}$) :

$$\begin{aligned} s_{AM}(t) &= A_c\left[1 + k_a m(t)\right]\cos(2\pi f_c t) \qquad (3.22)\\ s_{AM}(t) &= A_c\left[1 + k_a A_m \cos(2\pi f_m t)\right]\cos(2\pi f_c t)\\ s_{AM}(t) &= \Re\left\{e^{j2\pi f_c t}\left[A_c + A_c k_a A_m \cos(2\pi f_m t)\right]\right\} \end{aligned}$$

$$\boxed{s_{AM}(t) = \Re\left\{ e^{j2\pi f_c t} \underbrace{\left[A_c + \frac{A_c k_a A_m}{2} e^{j2\pi f_m t} + \frac{A_c k_a A_m}{2} e^{-j2\pi f_m t}\right]}_{\text{représentation complexe en bande de base : } \tilde{s}_{AM}(t)} \right\}} \tag{3.23}$$

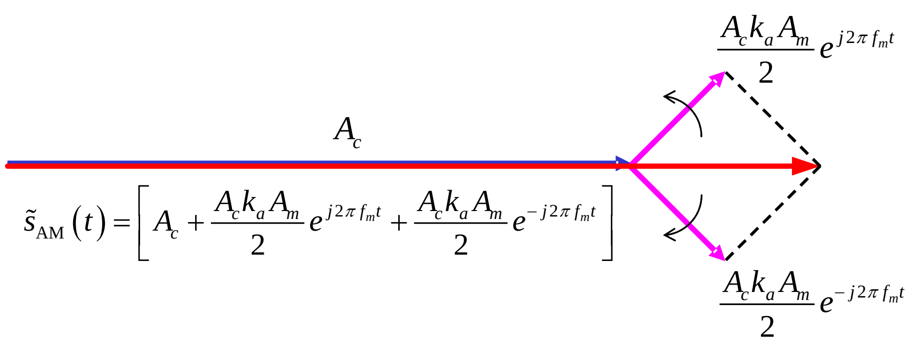



FIGURE 3.15: diagramme vectoriel (équivalent complexe en bande de base) d'un signal modulé en amplitude AM.

On remarque, dans le cas de la modulation AM conventionnelle, que l'amplitude du vecteur $\tilde{s}_{AM}(t)$ varie mais que la phase est toujours nulle (i.e. il n'y a pas de déphasage).

## 3.4 Modulation d'amplitude à bande latérale unique (SSB)

La modulation à bande latérale double (BLD) avec porteuse supprimée (DSB-SC : Double Sideband Suppressed Carrier) produit un signal modulé $s_{DSB}(t)$ dont la largeur de bande est égale à $2W$ alors que le signal en bande de base (message) $m(t)$ ne requiert que $W$ de largeur de bande.

Afin d'utiliser plus efficacement le spectre de fréquences, il est possible de ne transmettre que la bande supérieure haute (USB : Upper Sideband) ou la bande latérale basse (LSB : Lower Sideband) du signal modulé $s_{DSB}(t)$. On obtient ainsi un signal modulé à bande latérale unique (SSB : Single Sideband) $s_{SSB}(t)$.

Considérons en tout premier lieu un signal en bande de base, c'est-à-dire le message, $m(t)$ cosinusoïdal :

$$m(t) = \cos(2\pi f_m t) \tag{3.24}$$

où $f_m$ représente ici la fréquence du signal en bande de base.

En multipliant le signal $m(t)$ avec une porteuse $c(t) = \cos(2\pi f_c t)$ (i.e. $A_c = 1$), on obtient un signal modulé à bande latérale double $s_{DSB}(t)$ :

$$s_{DSB}(t) = m(t)c(t) = \cos(2\pi f_m t)\cos(2\pi f_c t) \tag{3.25}$$

En utilisant la relation trigonométrique :

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)] \tag{3.26}$$

le signal $s_{DSB}(t)$ devient :

$$s_{DSB}(t) = \frac{1}{2}\cos[2\pi(f_c-f_m)t] + \frac{1}{2}\cos[2\pi(f_c+f_m)t] \tag{3.27}$$

La première composante du signal $s_{DSB}(t)$, $\frac{1}{2}\cos[2\pi(f_c-f_m)t]$, constitue la bande latérale (unique) basse (LSB) du signal modulé alors que le second terme, $\frac{1}{2}\cos[2\pi(f_c+f_m)t]$, correspond à la bande latérale haute (USB) :

— bande latérale basse $s_{LSB}(t)$ :

$$\boxed{s_{LSB}(t) = \frac{1}{2}\cos[2\pi(f_c-f_m)t]} \tag{3.28}$$

— bande latérale haute $s_{USB}(t)$ :

$$\boxed{s_{USB}(t) = \frac{1}{2}\cos[2\pi(f_c+f_m)t]} \tag{3.29}$$

La composante à bande latérale basse $s_{LSB}(t) = \frac{1}{2}\cos(2\pi f_c t - 2\pi f_m t)$ peut s'écrire aussi, sachant que

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta, \tag{3.30}$$

de la manière suivante :

$$s_{LSB}(t) = \frac{1}{2}\cos(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_m t) + \frac{1}{2}\sin(2\pi f_c t)\sin(2\pi f_m t) \tag{3.31}$$

De même, on obtient l'expression suivante pour la bande latérale haute $s_{USB}(t) = \frac{1}{2}\cos(2\pi f_c t + 2\pi f_m t)$ :

$$s_{USB}(t) = \frac{1}{2}\cos(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_m t) - \frac{1}{2}\sin(2\pi f_c t)\sin(2\pi f_m t) \tag{3.32}$$

En fait, chacun de ces deux signaux représente un signal modulé à bande latérale unique $s_{SSB}(t)$, la seule différence étant l'addition ou la soustraction du terme $\frac{1}{2}\sin(2\pi f_c t)\sin(2\pi f_m t)$ :

$$s_{SSB}(t) = \frac{1}{2}\cos(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_m t) \pm \frac{1}{2}\sin(2\pi f_c t)\sin(2\pi f_m t) \tag{3.33}$$

Le terme $\frac{1}{2}\cos(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_m t)$ est obtenu directement de la multiplication du signal $m(t)$ par la porteuse $c(t)$. Le second terme, $\frac{1}{2}\sin(2\pi f_c t)\sin(2\pi f_m t)$, peut être obtenu par un déphasage de $-\frac{\pi}{2}$ du message $m(t)$ et de la porteuse $c(t)$.

La figure 3.16 montre des signaux modulés à bande latérale unique basse $s_{LSB}(t)$ et à bande latérale unique haute $s_{USB}(t)$ par le même message sinusoïdal $m(t)$.

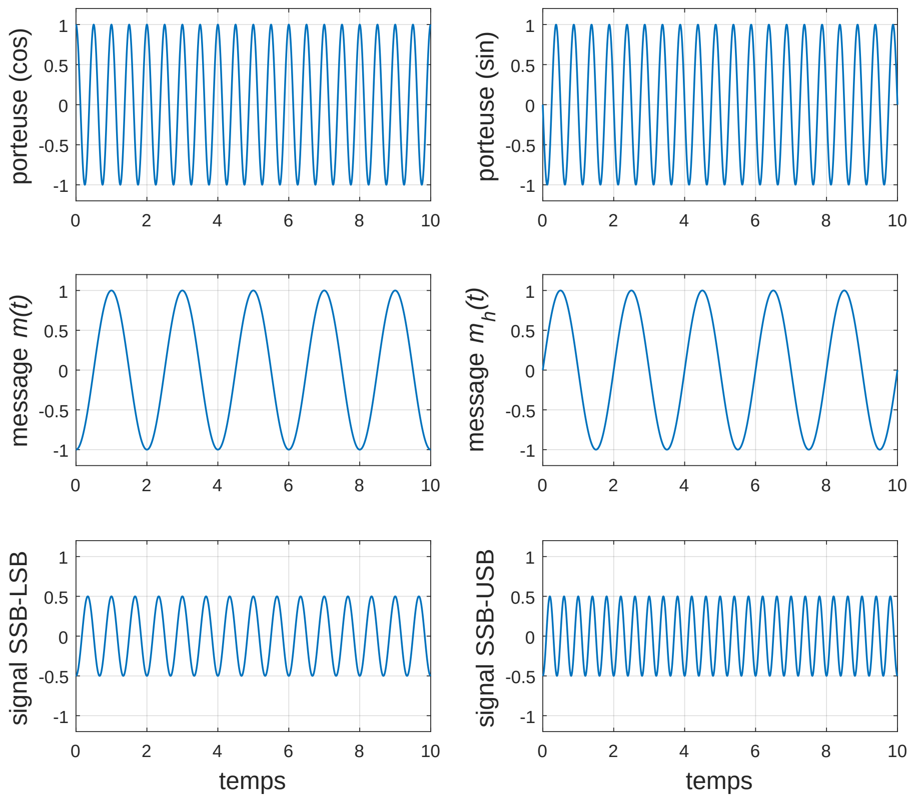



FIGURE 3.16: Signal sinusoïdal modulé à bande latérale unique.

En général, le message $m(t)$ n'est pas une cosinusoïde, mais plutôt un signal limité en fréquence, i.e. $M(f) \neq 0$ seulement pour $|f| < W$. Le signal modulé à bande latérale unique $s_{SSB}(t)$ s'exprime alors comme :

$$\boxed{s_{SSB}(t) = \frac{1}{2}m(t)\cos(2\pi f_c t) \pm \frac{1}{2}m_h(t)\sin(2\pi f_c t)} \tag{3.34}$$

où $m_h(t)$ est la transformée de Hilbert de $m(t)$, c'est-à-dire que $m_h(t)$ contient les mêmes composantes spectrales de $m(t)$ mais toutes déphasées de $-\frac{\pi}{2}$.

On peut se représenter la génération d'un signal modulé à bande latérale unique $s_{SSB}(t)$ par le schéma de la figure 3.17.

$$s_{SSB}(t) = \underbrace{\frac{1}{2}m(t)\cos(2\pi f_c t)}_{\text{signal DSB}} \pm \underbrace{\frac{1}{2}m_h(t)\sin(2\pi f_c t)}_{\text{version déphasée}} \tag{3.35}$$

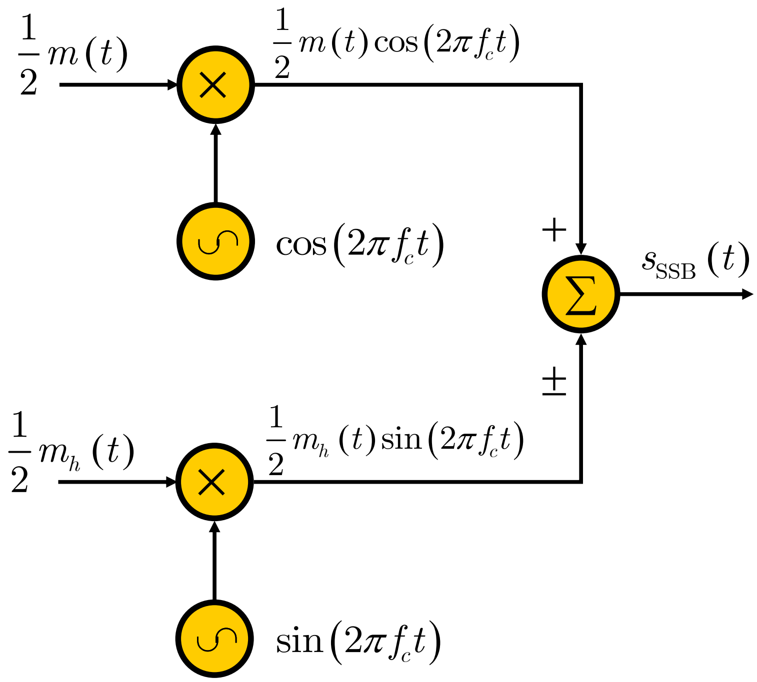



FIGURE 3.17: Modulateur d'amplitude à bande latérale unique SSB.

Sur la figure 3.18, un message quelconque $m(t)$ est modulé à bande latérale unique basse $s_{LSB}(t)$ et à bande latérale unique haute $s_{USB}(t)$.

Considérons le terme $m_h(t)\sin(2\pi f_c t)$. On sait que sa transformée de Fourier $M_h(f)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} M_h(f) &= \mathcal{F}[m_h(t)] = \mathcal{F}[\mathcal{H}[m(t)]] = \mathcal{F}\left[m(t) * \frac{1}{\pi t}\right] \\ M_h(f) &= M(f)[-j \text{ sgn}(f)] \end{aligned} \tag{3.36}$$

c'est-à-dire que :

$$M_h(f) = \begin{cases} jM(f) & \text{pour } f < 0 \\ -jM(f) & \text{pour } f \geq 0 \end{cases} \tag{3.37}$$

Le spectre du signal modulé $S_{SSB}(f)$ à bande latérale unique est donc :

$$\boxed{S_{SSB}(f) = M_p(f + f_c) + M_n(f - f_c) \qquad \text{en bande latérale basse (LSB)}} \tag{3.38}$$

$$\boxed{S_{SSB}(f) = M_n(f + f_c) + M_p(f - f_c) \qquad \text{en bande latérale haute (USB)}} \tag{3.39}$$

où $M_p(f) = M(f)$ pour $f \geq 0$ et $M_n(f) = M(f)$ pour $f < 0$, ou encore :

$$M(f) = M_n(f) + M_p(f) \qquad \text{et} \qquad M_h(f) = jM_n(f) - jM_p(f) \tag{3.40}$$

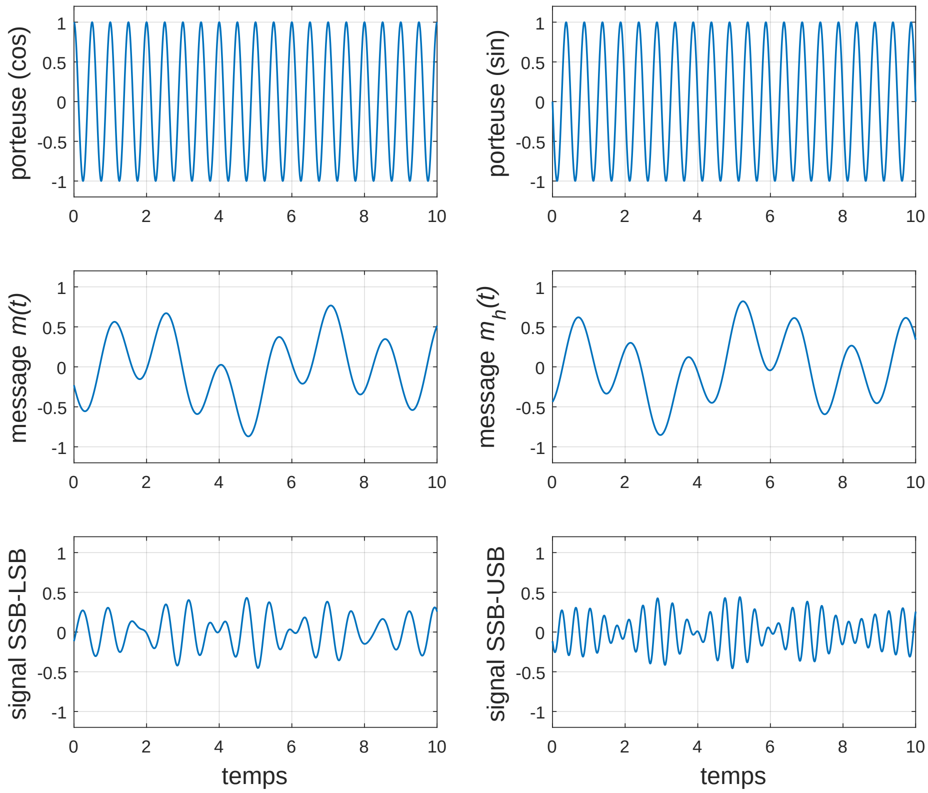



FIGURE 3.18: Signal quelconque modulé à bande latérale unique.

La démodulation du signal à bande latérale simple (unique) $s_{SSB}(t)$ peut se faire avec un détecteur cohérent (fig. 3.19).

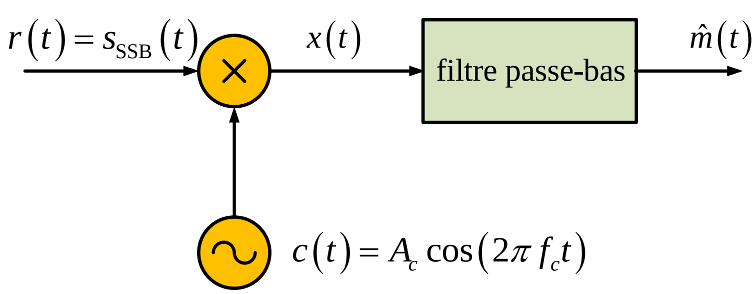



FIGURE 3.19: Démodulateur cohérent SSB.

Au récepteur, le signal $x(t)$ à la sortie du multiplicateur est donné par :

$$\begin{aligned}
x(t) &= s_{SSB}(t)c(t) \\
x(t) &= \left[\frac{1}{2}m(t)\cos(2\pi f_c t) \pm \frac{1}{2}m_h(t)\sin(2\pi f_c t)\right]\cos(2\pi f_c t) \\
x(t) &= \frac{1}{2}m(t)\cos^2(2\pi f_c t) \pm \frac{1}{2}m_h(t)\sin(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_c t) \\
x(t) &= \frac{m(t)}{4}[1+\cos(4\pi f_c t)] \pm \frac{m_h(t)}{4}[\sin(4\pi f_c t)+0] \\
x(t) &= \frac{m(t)}{4} + \frac{m(t)}{4}\cos(4\pi f_c t) \pm \frac{m_h(t)}{4}\sin(4\pi f_c t)
\end{aligned} \tag{3.41}$$

À la sortie du filtre passe-bas, on obtient l'estimé du message :

$$\hat{m}(t) = \frac{m(t)}{4} \tag{3.42}$$

ce qui est le signal désiré. Notez encore une fois la nécessité d'effectuer une démodulation cohérente, c'est-à-dire sans erreur de phase ($\Delta\theta_c = 0$ radians) et sans erreur de fréquence ($\Delta f_c = 0$ Hz).

## 3.5 Modulation d'amplitude en quadrature (QAM)

La modulation d'amplitude en quadrature (Quadrature Amplitude Modulation) permet, tout comme la modulation à bande latérale unique (SSB), d'utiliser efficacement le spectre de fréquence pour transmettre de l'information ; c'est-à-dire d'en augmenter l'efficacité spectrale.

Considérons deux signaux distincts en bande de base, $m_1(t)$ et $m_2(t)$, tous deux limités en largeur de bande : $M_1(f), M_2(f) = 0$ pour $|f| > W$.

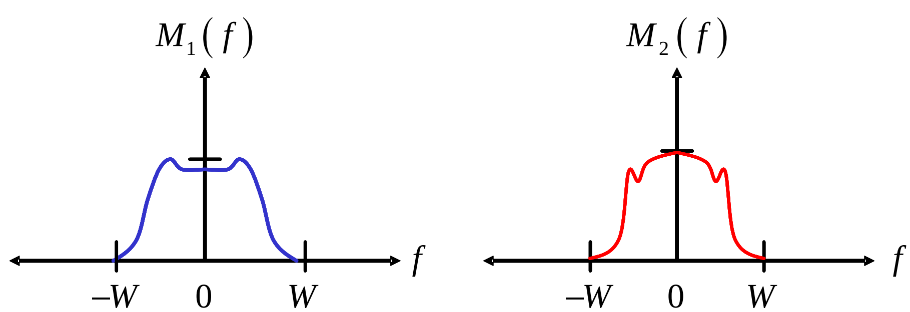



FIGURE 3.20: Spectre de signaux QAM distincts, $S_{QAM}(f)$.

Il est possible de transmettre simultanément les signaux $m_1(t)$ et $m_2(t)$ en n'utilisant qu'une largeur de bande totale de $2W$, augmentant ainsi l'efficacité spectrale du système de télécommunications. Le signal modulé $s_{QAM}(t)$ est obtenu de la manière suivante (fig. 3.21) :

$$\boxed{s_{QAM}(t) = \underbrace{A_c m_1(t)\cos(2\pi f_c t)}_{\text{message \#1}} + \underbrace{A_c m_2(t)\sin(2\pi f_c t)}_{\text{message \#2}}} \tag{3.43}$$

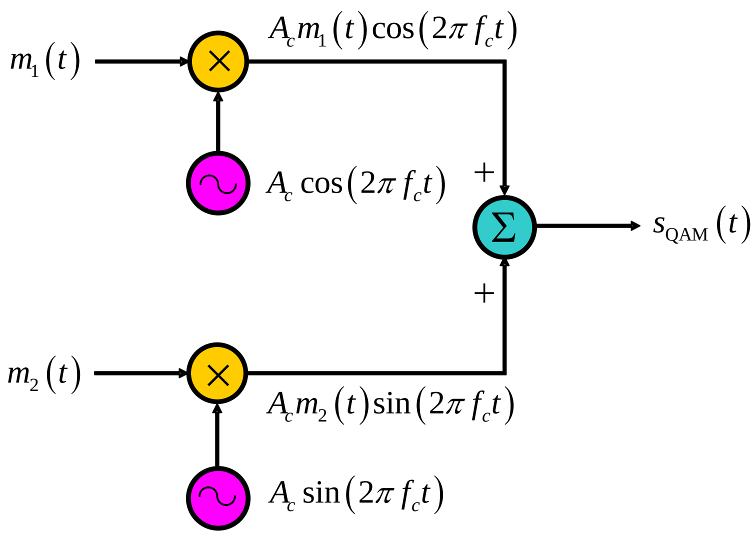



FIGURE 3.21: Modulateur QAM.

La figure 3.22 montre deux messages en bande de base modulés en un signal unique QAM.

Dans le domaine des fréquences, le signal modulé $S_{QAM}(f) = \mathcal{F}[s_{QAM}(t)]$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
S_{QAM}(f) &= \mathcal{F}\left[A_c m_1(t)\cos(2\pi f_c t) + A_c m_2(t)\sin(2\pi f_c t)\right] \qquad (3.44)\\
S_{QAM}(f) &= A_c\mathcal{F}\left[m_1(t)\cos(2\pi f_c t)\right] + A_c\mathcal{F}\left[m_2(t)\sin(2\pi f_c t)\right]\\
S_{QAM}(f) &= A_c\mathcal{F}\left[\cos(2\pi f_c t)\right] * M_1(f) + A_c\mathcal{F}\left[\sin(2\pi f_c t)\right] * M_2(f)\\
S_{QAM}(f) &= \frac{A_c}{2}[\delta(f+f_c)+\delta(f-f_c)] * M_1(f) + j\frac{A_c}{2}[\delta(f+f_c)-\delta(f-f_c)] * M_2(f)
\end{aligned}$$

ou encore :

$$\boxed{S_{QAM}(f) = \underbrace{\frac{A_c}{2}[M_1(f+f_c)+M_1(f-f_c)]}_{\text{message \#1}} + \underbrace{j\frac{A_c}{2}[M_2(f+f_c)-M_2(f-f_c)]}_{\text{message \#2}}} \tag{3.45}$$

On peut démoduler un signal reçu QAM avec un démodulateur à deux branches tel que montré à la figure 3.23.

À la réception, supposant que les oscillateurs aux transmetteur et récepteur sont exactement de même fréquence et de même phase, on obtient les signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ suivants :

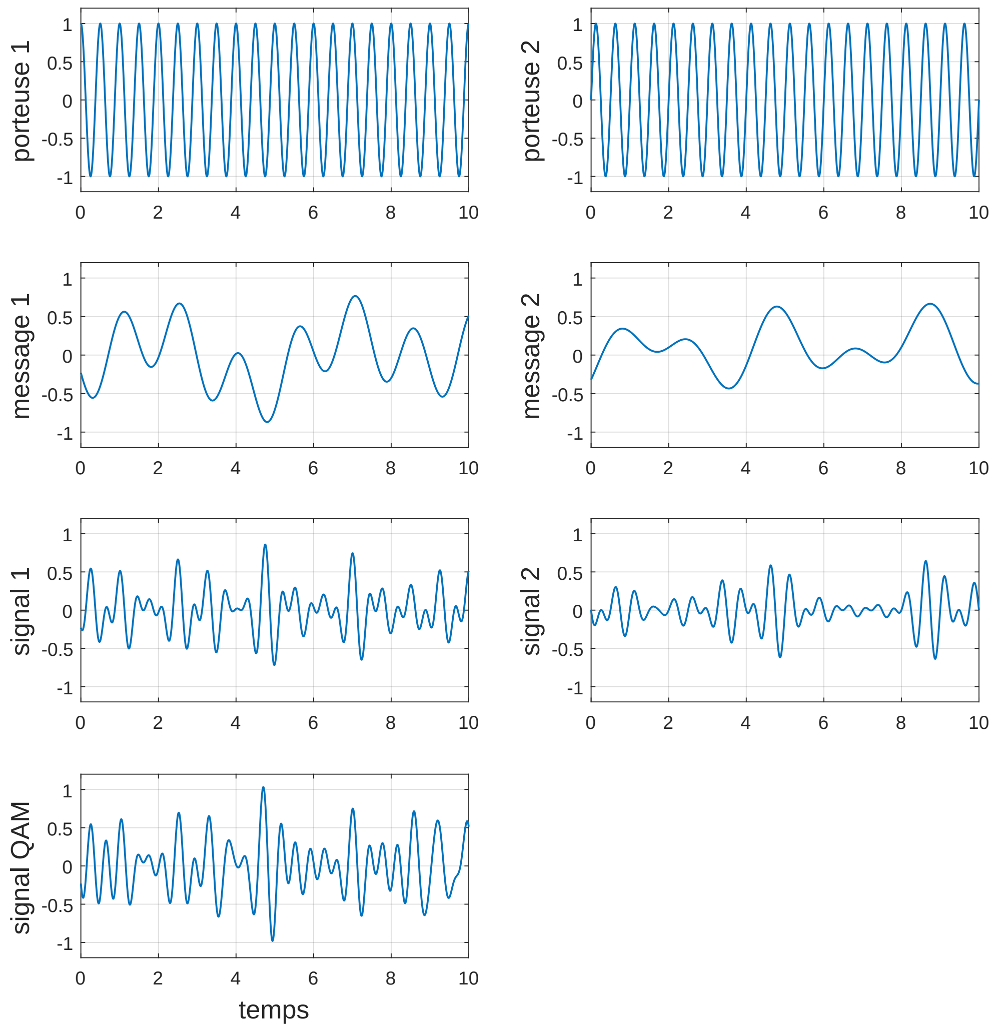



FIGURE 3.22: Signal QAM.

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= s_{QAM}(t) A_c \cos(2\pi f_c t) \\
x_1(t) &= \left[A_c m_1(t)\cos(2\pi f_c t) + A_c m_2(t)\sin(2\pi f_c t)\right] A_c \cos(2\pi f_c t) \\
x_1(t) &= A_c^2 m_1(t)\cos^2(2\pi f_c t) + A_c^2 m_2(t)\sin(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_c t) \\
x_1(t) &= \frac{A_c^2 m_1(t)}{2} + \frac{A_c^2 m_1(t)}{2}\cos(4\pi f_c t) + \frac{A_c^2 m_2(t)}{2}\sin(4\pi f_c t)
\end{aligned}
\tag{3.46}
$$

À la sortie du filtre passe-bas (branche du haut), on récupère (démodule) le message :

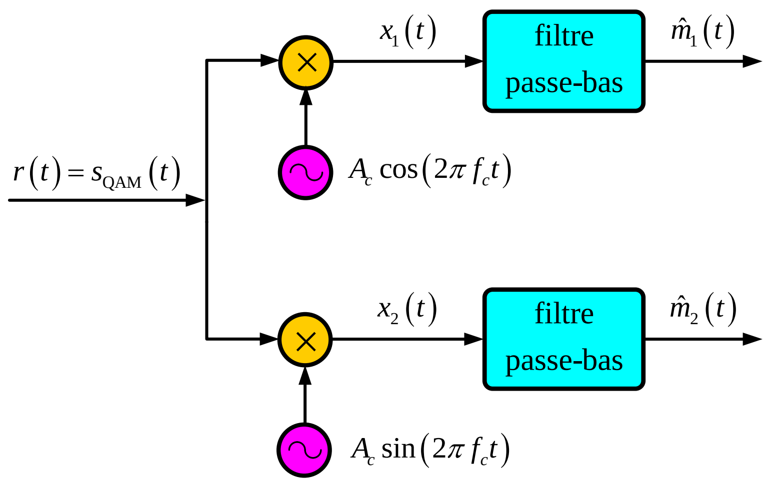



FIGURE 3.23: Démodulateur QAM.

$$\hat{m}_1(t) = \frac{A_c^2 m_1(t)}{2} \tag{3.47}$$

De la même manière, pour la branche du bas du récepteur, on a :

$$\begin{aligned}
x_2(t) &= s_{QAM}(t) A_c \sin(2\pi f_c t) \qquad (3.48)\\
x_2(t) &= [A_c m_1(t)\cos(2\pi f_c t) + A_c m_2(t)\sin(2\pi f_c t)]\, A_c \sin(2\pi f_c t)\\
x_2(t) &= A_c^2 m_1(t)\cos(2\pi f_c t)\sin(2\pi f_c t) + A_c^2 m_2(t)\sin^2(2\pi f_c t)\\
x_2(t) &= \frac{A_c^2 m_1(t)}{2}\sin(4\pi f_c t) + \frac{A_c^2 m_2(t)}{2} - \frac{A_c^2 m_2(t)}{2}\sin(4\pi f_c t)
\end{aligned}$$

Et après filtrage, on obtient $\hat{m}_2(t)$ :

$$\hat{m}_2(t) = \frac{A_c^2 m_2(t)}{2} \tag{3.49}$$

La modulation d'amplitude en quadrature permet la transmission de deux signaux sur un lien de télécommunications tout en n'utilisant que la largeur de bande d'un signal modulé à bande latérale double (DSB-SC).

Notez cependant que cela exige une démodulation cohérente, c'est-à-dire qu'il faut acquérir parfaitement la fréquence $f_c$ et la phase $\theta_c$ de la porteuse. Sinon, il y aura effet de croisement (ou "crosstalk") entre les signaux $m_1(t)$ et $m_2(t)$ à la sortie de chacune des deux branches du récepteur.

## 3.6 Modulation d'amplitude à bande latérale résiduelle (VSB)

La modulation d'amplitude à bande latérale unique (SSB) est efficace du point de vue spectral mais elle est aussi difficile à réaliser en pratique en raison des contraintes très strictes imposées au filtre passe-bande. Il faudrait pouvoir construire un filtre avec une réponse en fréquence idéale.

La modulation d'amplitude à bande latérale résiduelle (VSB : Vestigial Sideband) est plus aisée à réaliser car elle permet de laisser passer, de manière contrôlée, un "résidu" de l'autre bande latérale.

La figure 3.24 montre le principe de la modulation d'amplitude à bande latérale résiduelle :

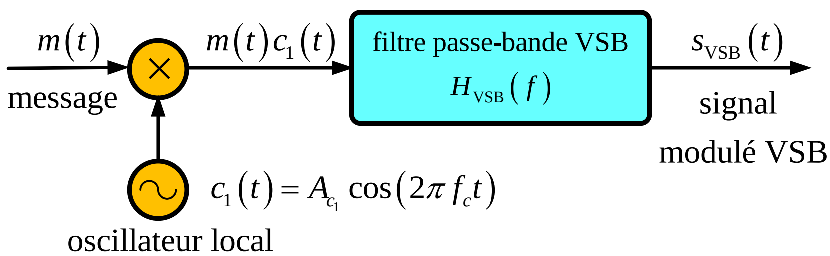



FIGURE 3.24: Modulateur de signal à bande latérale résiduelle.

Le signal modulé à bande latérale résiduelle, $s_{VSB}(t)$, est donc obtenu en multipliant le message $m(t)$ avec une porteuse $c_1(t)$ et en convoluant le signal résultant, $m(t)c_1(t)$, avec la réponse $h_{VSB}(t)$ d'un filtre passe-bande dont la fonction de transfert $H_{VSB}(f)$ est bien définie :

$$\boxed{s_{VSB}(t) = [m(t)c_1(t)] * h_{VSB}(t) = [m(t)A_{c_1}\cos(2\pi f_c t)] * h_{VSB}(t)} \tag{3.50}$$

Dans le domaine fréquentiel, le signal VSB devient :

$$\begin{aligned} S_{VSB}(f) &= \mathcal{F}\left[s_{VSB}(t)\right] \\ S_{VSB}(f) &= \mathcal{F}\left\{[m(t)A_{c_1}\cos(2\pi f_c t)] * h_{VSB}(t)\right\} \\ S_{VSB}(f) &= \mathcal{F}\left[m(t)A_{c_1}\cos(2\pi f_c t)\right] \cdot \mathcal{F}\left[h_{VSB}(t)\right] \end{aligned} \tag{3.51}$$

$$\boxed{S_{VSB}(f) = \frac{A_{c_1}}{2}\left[M(f+f_c) + M(f-f_c)\right] \cdot H_{VSB}(f)} \tag{3.52}$$

La figure 3.25 montre un exemple du module de la réponse en amplitude $H_{VSB}(f)$ d'un filtre passe-bande VSB :

Le schéma d'un démodulateur de signal à bande latérale résiduelle est illustré à la figure 3.26 :

Le signal reçu, $s_{VSB}(t)$, est multiplié au récepteur par une porteuse $c_2(t) = A_{c_2}\cos(2\pi f_c t)$ (i.e. on suppose ici une démodulation de type cohérent) pour donner un signal intermédiaire $x(t)$ :

$$x(t) = s_{VSB}(t)c_2(t) = s_{VSB}(t)A_{c_2}\cos(2\pi f_c t) \tag{3.53}$$

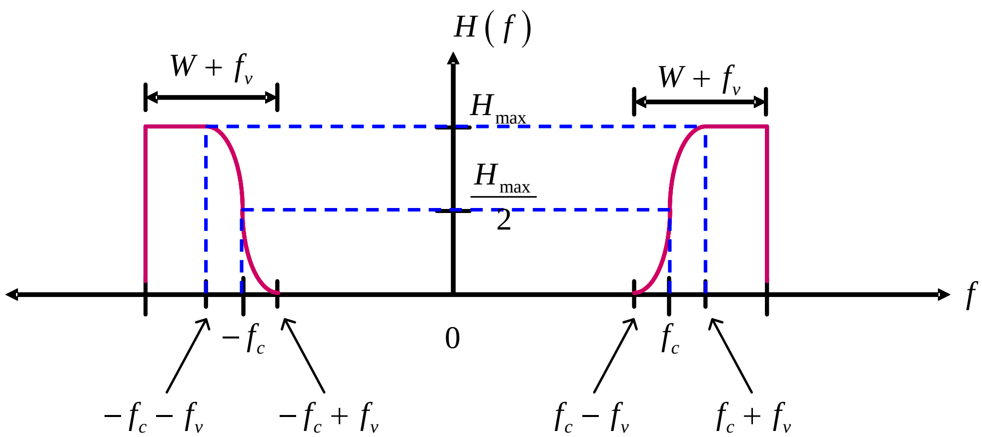



FIGURE 3.25: Réponse (module) en fréquence d'un filtre passe-bande VSB : $H_{VSB}(f)$.

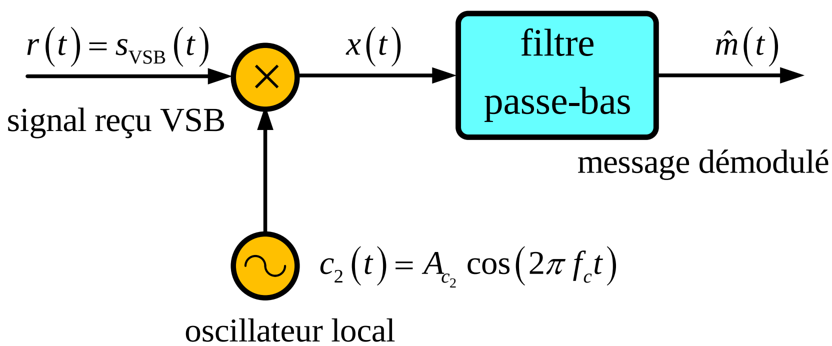



FIGURE 3.26: Démodulateur de signal à bande latérale résiduelle.

En prenant la transformée de Fourier de $x(t)$, on a :

$$\begin{aligned}
X(f) &= \mathcal{F}[x(t)] = \mathcal{F}[s_{VSB}(t)A_{c_2}\cos(2\pi f_c t)] \qquad (3.54)\\
X(f) &= \mathcal{F}[s_{VSB}(t)] * \mathcal{F}[A_{c_2}\cos(2\pi f_c t)]\\
X(f) &= S_{VSB}(f) * \frac{A_{c_2}}{2}[\delta(f+f_c) + \delta(f-f_c)]\\
X(f) &= \frac{A_{c_2}}{2}S_{VSB}(f+f_c) + \frac{A_{c_2}}{2}S_{VSB}(f-f_c)
\end{aligned}$$

Or sachant que le signal modulé $S_{VSB}(t)$ s'exprime comme :

$$S_{VSB}(f) = \frac{A_{c_1}}{2}[M(f+f_c) + M(f-f_c)] \cdot H_{VSB}(f) \qquad (3.55)$$

on peut réécrire :

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{A_{c_2}}{2} S_{VSB}(f+f_c) + \frac{A_{c_2}}{2} S_{VSB}(f-f_c) \\ X(f) &= \frac{A_{c_2}}{2}\left\{\frac{A_{c_1}}{2}\left[M(f+f_c+f_c)+M(f+f_c-f_c)\right]\cdot H_{VSB}(f+f_c)\right\} + \\ &\quad \frac{A_{c_2}}{2}\left\{\frac{A_{c_1}}{2}\left[M(f-f_c+f_c)+M(f-f_c-f_c)\right]\cdot H_{VSB}(f-f_c)\right\} \end{aligned} \tag{3.56}$$

$$X(f) = \frac{A_{c_1}A_{c_2}}{4}\left[M(f+2f_c)+M(f)\right]\cdot H_{VSB}(f+f_c) + \frac{A_{c_1}A_{c_2}}{4}\left[M(f)+M(f-2f_c)\right]\cdot H_{VSB}(f-f_c) \tag{3.57}$$

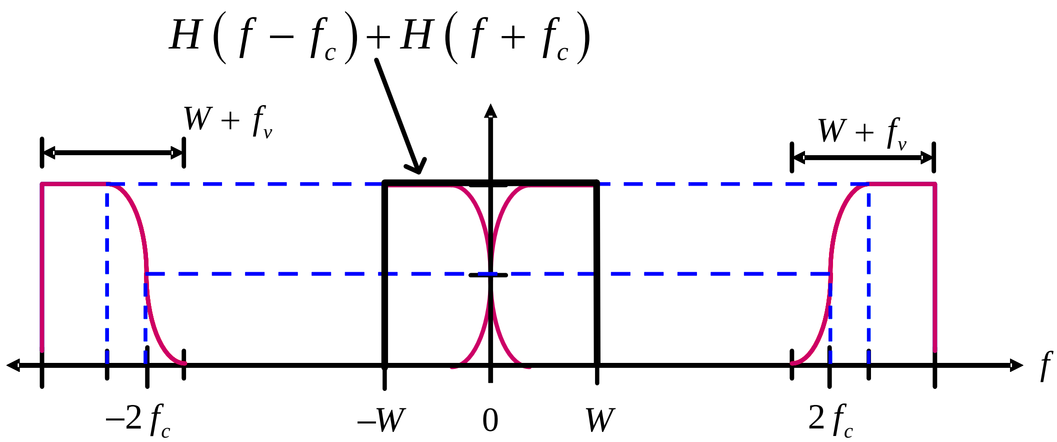



FIGURE 3.27: Spectre du signal VSB à la sortie du mélangeur.

À la sortie du filtre passe-bas, qui élimine les composantes aux hautes fréquences, on obtient le signal $\hat{M}(f)$ :

$$\hat{M}(f) = \frac{A_{c_1}A_{c_2}}{4} M(f)\cdot\left[H_{VSB}(f+f_c)+H_{VSB}(f-f_c)\right] \tag{3.58}$$

Afin de récupérer un signal $\hat{m}(t)$ sans distortion en bande de base, il faut que le filtre passe-bande VSB obéisse à la condition suivante :

$$\boxed{\left[H_{VSB}(f+f_c)+H_{VSB}(f-f_c)\right] = K \qquad \text{où } K \text{ est une constante.}} \tag{3.59}$$

Si c'est le cas alors $\hat{M}(f)$ devient proportionnel au message transmis $M(f)$ :

$$\hat{M}(f) = \frac{KA_{c_1}A_{c_2}}{4} M(f) \tag{3.60}$$

ou, dans le domaine du temps :

$$\hat{m}(t) = \frac{KA_{c_1}A_{c_2}}{4}m(t) \tag{3.61}$$

c'est-à-dire que $\hat{m}(t)$ est proportionnel à $m(t)$.

Les caractéristiques d'un filtre passe-bande VSB au transmetteur sont donc :

1. une symétrie "impaire" autour de la fréquence porteuse $f_c$, i.e. dans la plage de fréquences $f_c - f_v \leq f \leq f_c + f_v$, et
2. une phase qui varie *linéairement* sur l'intervalle $f_c - f_v \leq f \leq f_c + W$.

Un exemple concret de l'utilisation de la modulation à bande latérale résiduelle (VSB) est la télévision commerciale terrestre.

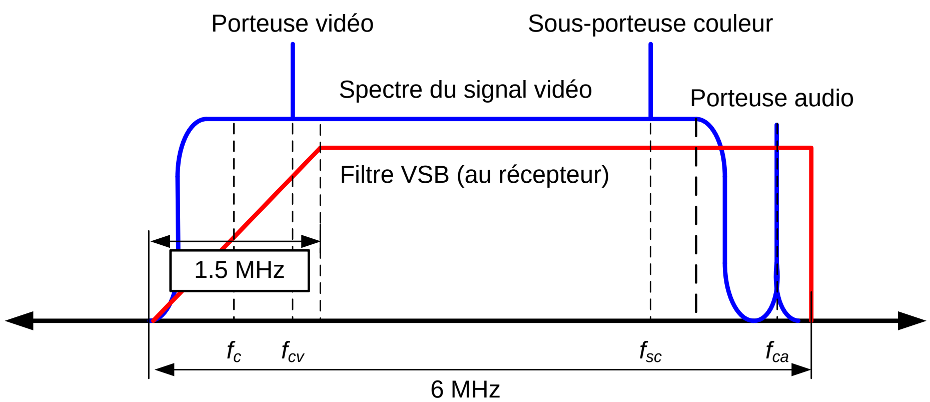



FIGURE 3.28: Spectre d'un signal de télévision NTSC.

La largeur de bande d'un signal de télédiffusion Nord-Américain NTSC est $W =$ 6 MHz. Par exemple, un tel signal peut occuper la bande de fréquences allant de 54 MHz à 60 MHz. Un filtre passe-bande VSB est employé au récepteur plutôt qu'au transmetteur. La porteuse vidéo se situe à 55.25 MHz alors que la porteuse audio est à 59.75 MHz. La symétrie impaire se trouve dans la plage de fréquences allant de $f_c - f_v =$ 54.5 MHz à $f_c + f_v =$ 56 MHz, c'est-à-dire autour de la porteuse vidéo à $f_c =$ 55.25 MHz.

## 3.7 Multiplexage fréquentiel

Le *multiplexage* consiste à partager un canal commun (ressources communes) parmi $N$ utilisateurs.

Le multiplexage des signaux provenant des $N$ utilisateurs peut se faire en partageant le spectre (bande de fréquences assignée à l'ensemble des utilisateurs) : on parle alors de *multiplexage fréquentiel* (en anglais, FDM : "Frequency Division Multiplexing"). On peut aussi multiplexer les signaux provenant des $N$ utilisateurs en utilisant toute la bande de fréquences mais en assignant des *intervalles de temps* distincts pour chaque utilisateur. Il s'agit alors de *multiplexage temporel* (TDM : "Time Division Multiplexing").

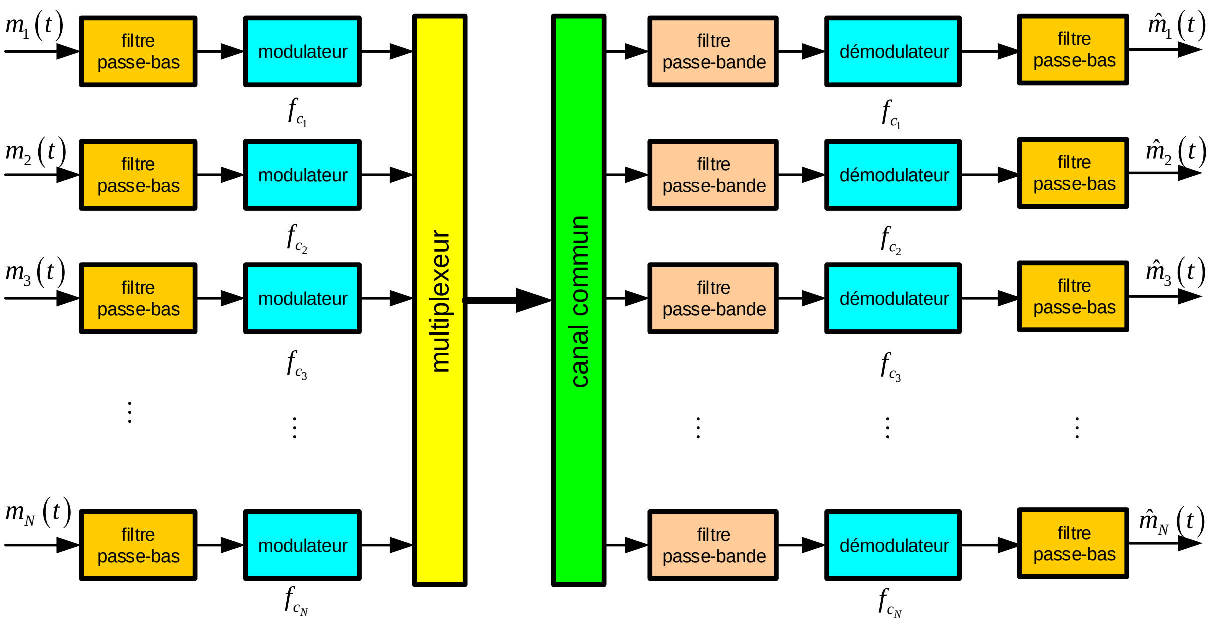



FIGURE 3.29: Multiplexage et démultiplexage fréquentiels.

Nous nous intéressons ici à la méthode de multiplexage fréquentiel (le multiplexage temporel sera étudié plus tard).

---

**Exemple 3.2 :** Multiplexage fréquentiel de canaux de téléphonie analogiques

---

En téléphonie conventionnelle, les signaux analogiques (i.e. la voix), occupant les fréquences allant de 300 Hz à 3,400 kHz en bande de base, sont filtrés avec des filtres passe-bas de 4 kHz, puis multiplexés en fréquence en plusieurs étapes.

La première étape de multiplexage fréquentiel consiste à regrouper 12 canaux vocaux de 4 kHz afin de former un *groupe de base* :

$$f_{c_{\text{base}}} = (112 - 4n) \text{ kHz} \qquad \text{où } n = 1, 2, \ldots, 12.$$

Les bandes latérales basses sont filtrées par un filtre passe-bande puis combinées en un groupe de 12 bandes latérales basses pour occuper la plage de fréquences de 60 kHz à 108 kHz (i.e. signal 1 $\rightarrow$ 104 à 108 kHz, ..., signal 12 $\rightarrow$ 60 à 64 kHz).

L'étape suivante consiste à former un *supergroupe* en combinant la bande latérale basse de 5 groupes de base occupant la bande de fréquences allant de 312 kHz à 552 kHz :

$$f_{c_{\text{supergroupe}}} = (372 + 48n) \text{ kHz} \qquad \text{où } n = 1, 2, \ldots, 5. \tag{3.62}$$

Ainsi pour le groupe 1, la porteuse est de 420 kHz et le spectre résultant occupe les bandes latérales basse (312 à 360 kHz) et haute (480 à 528 kHz). On ne conserve que la bande latérale basse. De même, la porteuse du groupe 2 est de 468 kHz et les bandes latérales sont 360 à 408 kHz et 528 à 576 kHz : on ne garde que la bande latérale basse, soit 360 à 408 kHz, et ainsi de suite (groupe 3 $\rightarrow$ 408 à 456 kHz, groupe 4 $\rightarrow$ 456 à 504 kHz, groupe 5 $\rightarrow$ 504 à 552 kHz).
Le supergroupe contient donc 60 canaux de téléphonie analogiques.

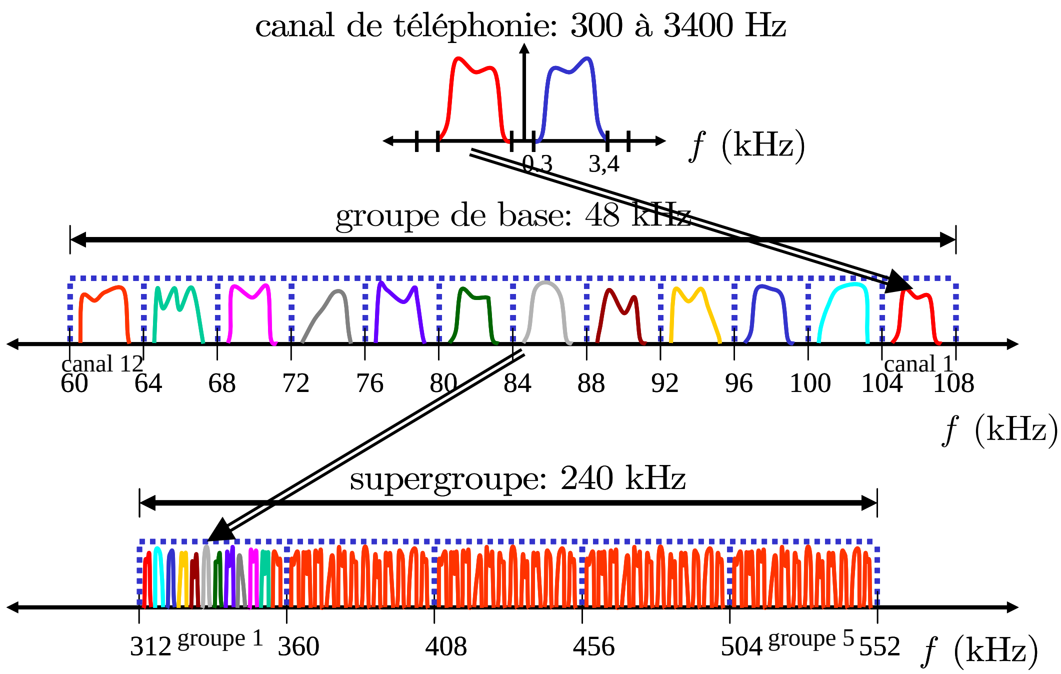



FIGURE 3.30: Multiplexage fréquentiel de canaux de téléphonie analogique.

Ces supergroupes peuvent être par la suite à nouveau combinés par groupe de 10 afin de former un *groupe maître* supportant 600 canaux de téléphonie. On peut regrouper 3 groupes maîtres en un signal L3 (1800 canaux téléphoniques), ou encore en un signal L4 avec 6 groupes maîtres (3600 canaux de téléphonie).

## 3.8 Récepteur superhétérodyne

Pour les systèmes de *diffusion*, que ce soit de la *radiodiffusion* ou de la *télédiffusion*, le récepteur doit pouvoir effectuer les opérations suivantes :
— la synthonisation de la porteuse désirée,
— le filtrage des signaux non désirés afin de ne conserver que le signal utile (e.g., station de radio désirée),
— la démodulation (en amplitude, en phase, ou en fréquence) du signal reçu, et
— l'amplification du signal démodulé en bande de base.

Le récepteur superhétérodyne permet d'effectuer ces opérations. Il est en pratique utilisé pour la réception des signaux de radiodiffusion AM et FM ainsi que pour la télédiffusion.

La figure 3.31 montre le schéma-bloc d'un récepteur superhétérodyne.

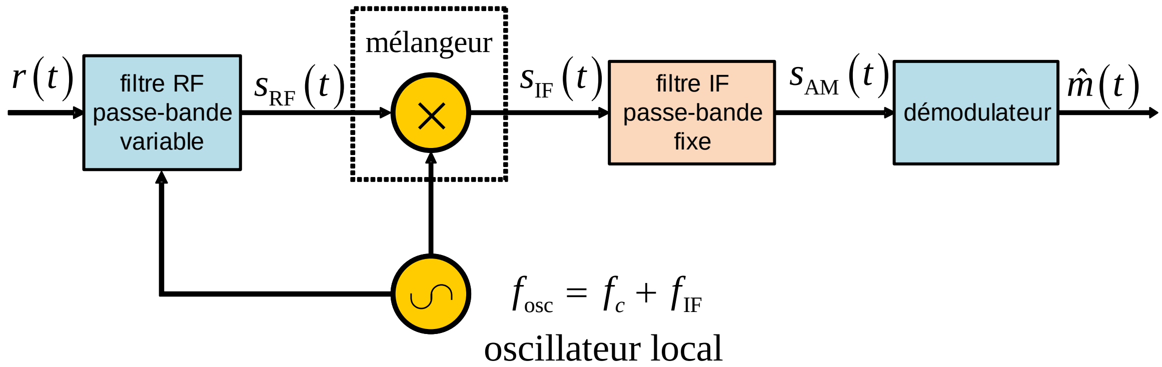



FIGURE 3.31: Récepteur superhétérodyne.

Le signal reçu $r(t)$ du canal de transmission est premièrement filtré autour de sa fréquence porteuse $f_c$ à l'aide d'un filtre passe-bande variable RF ("Radio Frequency"). La fonction de ce filtre passe-bande variable est d'éliminer les *fréquences images*.

Le signal RF filtré, $s_{RF}(t)$, est alors *mélangé* à une porteuse générée par un oscillateur local dont la fréquence $f_{osc} = f_c + f_{IF}$ où $f_c$ est la porteuse désirée (i.e., station de diffusion désirée et $f_{IF}$ est la *fréquence intermédiaire*.

À la sortie de ce mélangeur, on obtient le signal $s_{IF}(t)$ de *fréquence intermédiaire* :

$$\begin{aligned} s_{IF}(t) &= s_{RF}(t)\cos(2\pi f_{osc}t) \\ s_{IF}(t) &= s_{RF}(t)\cos[2\pi(f_c + f_{IF})t] \end{aligned} \tag{3.63}$$

Après filtrage avec le filtre passe-bande fixé à la fréquence intermédiaire $f_{IF}$, on obtient les signaux suivant, selon le type de modulation employé :

$$\begin{aligned} s_{AM}(t) &= \frac{A_c}{2}[1 + k_a m(t)]\cos(2\pi f_{IF}t) \qquad \text{(modulation AM)} \\ s_{PM}(t) &= \frac{A_c}{2}\cos(2\pi f_{IF}t + k_p m(t)) \qquad \text{(modulation PM)} \\ s_{FM}(t) &= \frac{A_c}{2}\cos\left(2\pi f_{IF}t + k_f\int_{-\infty}^{t} m(\tau)d\tau\right) \qquad \text{(modulation FM)} \end{aligned} \tag{3.64}$$

où cette fois-ci la fréquence porteuse $f_{IF}$ est constante, par exemple $f_{IF} = 455$ kHz en modulation d'amplitude. Il ne reste plus qu'à effectuer la démodulation proprement dite à l'aide d'un détecteur d'enveloppe (pour la modulation AM) ou un discriminateur (pour les modulations PM et FM).

---

**Exemple 3.3 :** Récepteur superhétérodyne

---

En radiodiffusion AM (conventionnelle), la porteuse RF se situe dans la plage de fréquences :

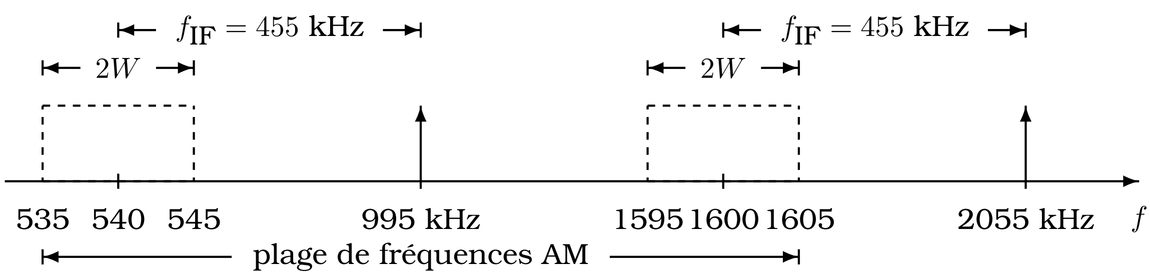
$$f_{c_{\text{min}}} = 540 \text{ kHz} \leq f_c \leq= f_{c_{\text{max}}} = 1,600 \text{ kHz}$$

La fréquence intermédiaire $f_{\text{IF}}$ = 455 kHz. L'oscillateur local doit donc pouvoir générer une fréquence $f_{\text{osc}}$ permettant de ramener le signal RF en fréquence intermédiaire en déplaçant le spectre du signal reçu autour de la fréquence intermédiaire $f_{\text{IF}}$ :

$$\begin{aligned} f_{c_{\text{min}}} + f_{\text{IF}} &\leq f_{\text{osc}} \leq f_{c_{\text{max}}} + f_{\text{IF}} \\ (540 + 455) \text{ kHz} &\leq f_{\text{osc}} \leq (1600 + 455) \text{ kHz} \\ 995 \text{ kHz} &\leq f_{\text{osc}} \leq 2,055 \text{ kHz} \end{aligned}$$

La largeur de bande du signal audio en bande de base étant de $W$ = 5 kHz, le signal en bande passante a une largeur de bande égale à $2W$ = 10 kHz. Le signal étant à bande latérale double (i.e. *DSB-TC*), la bande de fréquence totale réservée à la radiodiffusion AM est :

$$[535 \text{ kHz} \leq f \leq 1,605 \text{ kHz}]$$




*Remarque :* On aurait pu choisir la fréquence de l'oscillateur local, $f_{\text{osc}}$, à 455 kHz en dessous de la fréquence centrale (de la fréquence porteuse) du signal modulé :

$$\begin{aligned} f_{c_{\text{min}}} - f_{\text{IF}} &\leq f_{\text{osc}} \leq f_{c_{\text{max}}} - f_{\text{IF}} \\ (540 - 455) \text{ kHz} &\leq f_{\text{osc}} \leq (1600 - 455) \text{ kHz} \\ 85 \text{ kHz} &\leq f_{\text{osc}} \leq 1,145 \text{ kHz} \end{aligned}$$

La largeur de bande du filtre passe-bande RF doit être suffisamment grande afin de permettre à toutes les composantes du signal reçu en bande passante RF de passer, c'est-à-dire : $B_{\text{RF}} > 10$ kHz. Il est très difficile en pratique de réaliser un filtre passe-bande de fréquence centrale variable aux fréquences RF avec une grande précision. Ce rôle est plutôt joué par le filtre passe-bande fixe à la fréquence intermédiaire $f_{\text{IF}}$. Le filtre RF sert plutôt à éliminer les fréquences images : celles-ci se situent à $2f_{\text{IF}}$ = 910 kHz du signal désiré. Il faut donc que :

$$10 \text{ kHz} < B_{\text{RF}} < 910 \text{ kHz}$$

Par exemple, supposons que nous désirions synthoniser une station de radiodiffusion AM à la fréquence porteuse $f_{c_1}$ = 620 kHz. Pour recevoir ce signal, la fréquence de l'oscillateur local doit être :

$$f_{\text{osc}} = f_{c_1} + f_{\text{IF}} = (620 + 455) \text{ kHz} = 1{,}075 \text{ kHz}.$$

À la sortie du mélangeur, on obtient donc le signal désiré à la fréquence intermédiaire :

$$s_{AM}(t) = \frac{A_c}{2}[1 + k_a m(t)] \cos(2\pi f_{IF} t)$$

qui est par la suite démodulé par le détecteur d'enveloppe puis amplifié avec un amplificateur audio.

Maintenant, supposons qu'une seconde station de radiodiffusion émet un signal radio à la fréquence porteuse $f_{c_2} = f_{c_1} + 2f_{\text{IF}}$, c'est-à-dire à $f_{c_2}$ = (620 + 910) kHz = 1,530 kHz, qui est aussi une fréquence valide comprise dans le spectre de fréquences allouées à la radiodiffusion AM : $[540, 1600]$ kHz.

Alors, à la sortie du mélangeur, on aura un signal aux fréquences suivantes :

$$\begin{aligned} f_{c_2} + f_{\text{osc}} &= (1{,}530 + 1{,}075) \text{ kHz} = 2{,}605 \text{ kHz} \qquad \text{mais aussi à} \\ f_{c_2} - f_{\text{osc}} &= (1{,}530 - 1{,}075) \text{ kHz} = 455 \text{ kHz!} \end{aligned}$$

Ce deuxième signal ne sera donc pas éliminé par le filtre passe-bande fixe IF et s'ajoutera donc au signal désiré de la première station de radiodiffusion avant la démodulation. Le filtre passe-bande variable RF permet donc d'éliminer la fréquence image $f_{c_2}$.