Vision numérique H2017 GIF-4100 / GIF-7001

Premier examen partiel
Solution

Question 1 Transformations rigides

A) La séquence des transformations rigides permettant de passer du repère monde au repère de l'avion est composée comme suit :

$$\tilde{\underline{v}}_{world} = \tilde{\underline{\underline{T}}}_{y_1} \tilde{\underline{\underline{R}}}_{x}(\theta) \tilde{\underline{\underline{T}}}_{y_2} \tilde{\underline{\underline{R}}}_{x}(-\theta) \tilde{\underline{\underline{T}}}_{y_3} \tilde{\underline{v}}_{avion} \qquad (Q1.1)$$

Par conséquent, pour connaître les coordonnées d'un point du repère world $\tilde{\underline{v}}_w$ dans le repère de l'avion, il faut inverser l'équation Q1.1, ce qui donne :

$$\tilde{\underline{v}}_{avion} = \tilde{\underline{\underline{T}}}_{y_3}^{-1} \tilde{\underline{\underline{R}}}_{x}^{T}(-\theta) \tilde{\underline{\underline{T}}}_{y_2}^{-1} \tilde{\underline{\underline{R}}}_{x}^{T}(\theta) \tilde{\underline{\underline{T}}}_{y_1}^{-1} \tilde{\underline{v}}_{world} \qquad (Q1.2)$$

B) On a que, pour (Q1.1) :

$$\tilde{\underline{\underline{T}}}_{y_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t_{y_1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{\underline{\underline{R}}}_{x}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{\underline{\underline{T}}}_{y_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t_{y_2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\underline{\underline{R}}}_{x}(-\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{\underline{\underline{T}}}_{y_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t_{y_3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Par conséquent, pour Q1.2, on a que :

$$\tilde{\underline{\underline{T}}}_{y_1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -t_{y_1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{\underline{\underline{R}}}_{x}^{T}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{\underline{\underline{T}}}_{y_2}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -t_{y_2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\underline{\underline{R}}}_{x}^{T}(-\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{\underline{\underline{T}}}_{y_3}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -t_{y_3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Quand le point "T" est à l'origine de son repère de coordonnées (i.e. "T" est à $\underline{t}_{avion} = (0,0,0)^T$

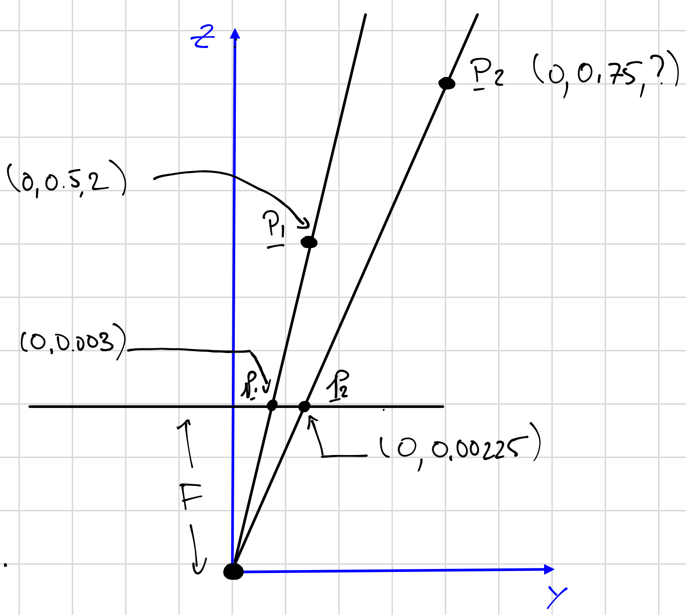
(Question 2) Formation des images et sténopé

Le principe de projection de perspective permet d'écrire pour $\underline{P}_1$:

$$\frac{Y_1}{Z_1} = \frac{y_1}{F} \quad (Q2.1) \quad \text{et} \quad \frac{X_1}{Z_1} = \frac{x_1}{F} \quad (Q2.2)$$

et pour $\underline{P}_2$:

$$\frac{Y_2}{Z_2} = \frac{y_2}{F} \quad (Q2.3) \quad \text{et} \quad \frac{X_2}{Z_2} = \frac{x_2}{F} \quad (Q2.4)$$



Les paramètres X_1, Y_1, Z_1, x_1, y_1 et x_2, y_2 sont connus.

On peut trouver F avec les valeurs de Y_1, Z_1 et y_1 grâce à (Q2.1) et remplacer F dans (Q2.3) pour calculer l'inconnue recherchée qui est Z_2.

Avec (Q2.1) on a que

$$F = \frac{y_1 Z_1}{Y_1}$$ qu'on peut remplacer dans (Q2.3), ce qui donne :

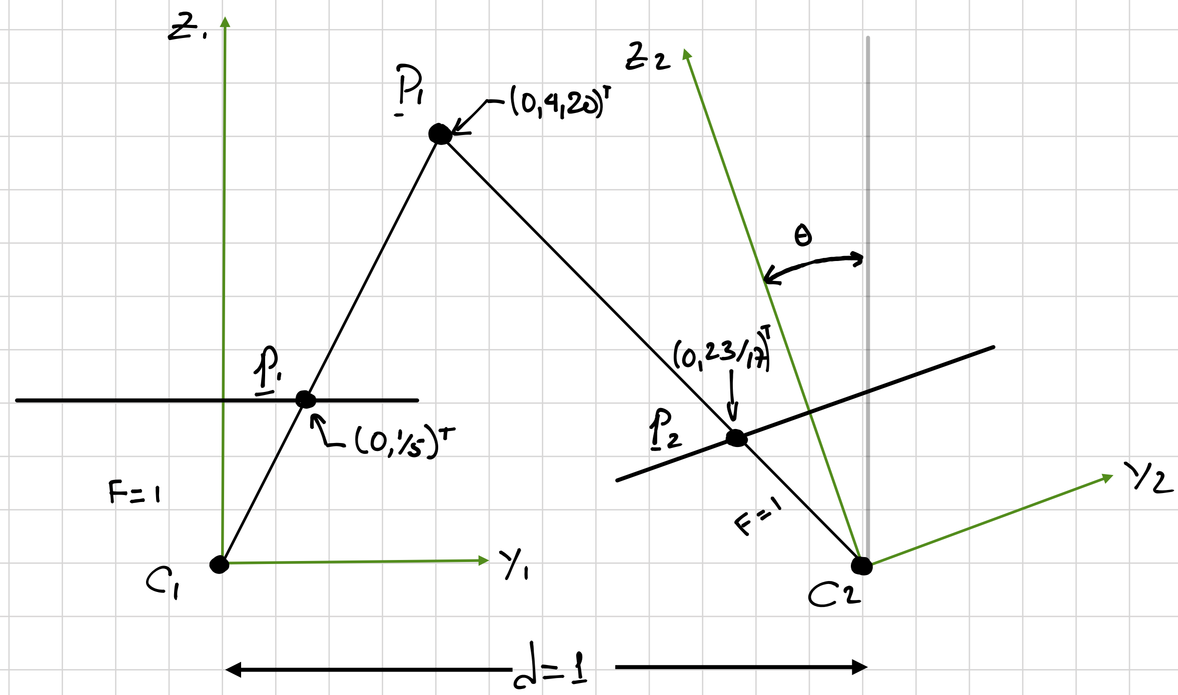
$$Z_2 = \frac{Y_2 F}{y_2} = \frac{Y_2}{y_2} \frac{y_1 Z_1}{Y_1}$$

En remplaçant les paramètres par les valeurs fournies dans l'énoncé du problème, on a :

$$Z_2 = \frac{0.75 \times 0.003 \times 2}{0.00225 \times 0.5}$$

$$\boxed{Z_2 = 4\,m}$$

Question 3) Projection de perspective



D'après la figure et l'énoncé du problème, on a que :

$$\underline{\tilde{P}}_1 = \underline{\underline{\tilde{T}}}_Y \, \underline{\underline{\tilde{R}}}_x \, \underline{\tilde{P}}_2 \qquad \text{(Q3.1)}$$

Ceci permet d'exprimer les coordonnées de points du repère C_2 dans le repère C_1. On a donc que, pour $\underline{P}_2$ en fonction de C_1 :

$$\underline{\tilde{P}}_2 = \underline{\underline{\tilde{R}}}_x^{-1} \, \underline{\underline{\tilde{T}}}_Y^{-1} \, \underline{\tilde{P}}_1 \qquad \text{(Q3.2)}$$

D'après l'énoncé :

$$\underline{\tilde{P}}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -d \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{\tilde{P}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & -d\cos\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & d\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 20 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(Q3.3)}$$

En développant (Q3.3) et en passant en coordonnées réelles on obtient :

$$\underline{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ (4-d)\cos\theta + 20\sin\theta \\ -(4-d)\sin\theta + 20\cos\theta \end{bmatrix} \qquad \text{(Q3.4)}$$

La projection de perspective de $\underline{P}_2$ donne :

$$x_2 = \frac{X_2 F}{Z_2} \qquad y_2 = \frac{Y_2 F}{Z_2}$$

La donnée du problème permet d'écrire

$$x_2 = 0 \qquad y_2 = \frac{(4-d)\cos\theta + 20\sin\theta}{-(4-d)\sin\theta + 20\cos\theta} = \frac{23}{17}$$

Dans l'équation pour y_2 ci-dessus, on obtient avec $d=1$:

$$\frac{3\cos\theta + 20\sin\theta}{-3\sin\theta + 20\cos\theta} = \frac{23}{17}$$

ou encore

$$\frac{\cancel{\sin\theta}}{\cancel{\sin\theta}}\left[\frac{3\,tg\,\theta + 20}{-3\,tg\,\theta + 20}\right] = \frac{23}{17}$$

En isolant $tg\,\theta$ on a

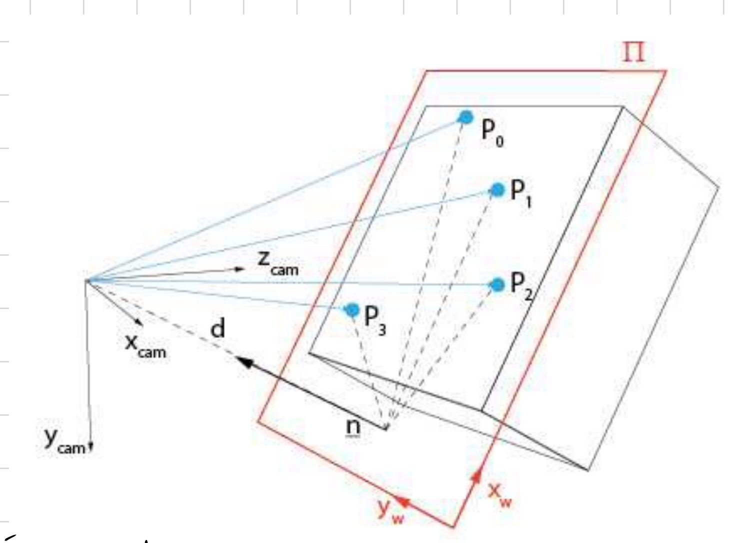
$$tg\,\theta = 1$$

$$\rightarrow \boxed{\theta = 45°}$$

Question 4) Homographies

A)

a) On a que



$$\underline{P}_w = \underline{\underline{R}}\,\underline{P}_{cam} + \underline{t} \qquad (1)$$

et

$$\underline{n}^T_w\,\underline{P}_{i-w} = 0 \qquad (2)$$

(1) dans (2) donne

$$\underline{n}^T_w\,\underline{P}_w = \underline{n}^T_w\,\underline{\underline{R}}\,\underline{P}_{cam} + \underline{n}_w^t\,\underline{t} = 0$$ et, en réarrangeant :

$$\underline{n}^T_w\,\underline{\underline{R}}\,\underline{P}_{cam} = -\underline{n}^T_w\,\underline{t} \qquad (Q4.1)$$

b) Si on prend (Q4.1) on a que

$$\underline{n}^T_w\,\underline{\underline{R}}\,\underline{P}_{cam} = -\underline{n}^T_w\,\underline{t} * 1 = -\underline{n}^T_w\,\underline{t}\left(-\frac{\underline{n}^T_{cam}\underline{P}_{cam}}{d}\right) \qquad (Q4.2)$$

Car, d'après la figure, les points sur le plan Π satisfont l'équation

$$\underbrace{\underline{n}^T_{cam}\,\underline{P}_{i-cam} + d = 0}_{(Q4.3)}$$ où d est la distance entre le plan et l'origine du repère caméra

de (Q4.3) on a que

$$\underline{n}_{cam}^T \underline{P}_{i\text{-}cam} = -d \quad \text{et donc que}$$

$$1 = \frac{-\underline{n}_{cam}^T \underline{P}_{c\text{-}cam}}{d} \qquad (Q4.4)$$

qui se retrouve donc bien dans (Q1.2).

c) On a de a) que

$$\underline{n}_w^T \underline{\underline{R}}\, \underline{P}_{cam} = -\underline{n}_w^T \underline{t} \qquad (Q4.1)$$

et avec le résultat (Q 4.4)

$$\underline{n}_T^w \underline{P}_w = \underline{n}_w^T \underline{\underline{R}}\, \underline{P}_{cam} + \underline{n}_w^T \underline{t} = 0$$

$$\rightarrow \underline{n}_w^T \underline{\underline{R}}\, \underline{P}_{cam} = -\underline{n}_w^T \underline{t} = -\underline{n}_w^T\left(\frac{-\underline{n}_{cam}^T \underline{P}_{cam}}{d}\right)$$

$$\underline{n}_w^T \underline{\underline{R}}\, \underline{P}_{cam} = \underline{n}_w^T\left(\frac{\underline{t}\, \underline{n}_{cam}^T}{d}\right) \underline{P}_{cam}$$

$$\rightarrow \underline{n}_w^T \underline{\underline{R}} = \frac{\underline{n}_w^T\, \underline{t}\, \underline{n}_{cam}^T}{d}$$

$$\underline{n}_w^T\left(\underline{\underline{R}} - \frac{\underline{t}\, \underline{n}_{cam}^T}{d}\right) = 0 = \underline{n}_T^w \underline{P}_w$$

$$\rightarrow \underline{P}_w = \underbrace{\underline{\underline{R}} - \frac{\underline{t}\, \underline{n}_{cam}^T}{d}}_{\text{homographie}} \underline{P}_c$$

B) a) Si $\underline{\underline{K}}_1 = \underline{\underline{K}}_2 = \underline{\underline{I}}$, l'homographie est donnée (résultat de A)) :

$$\underline{\tilde{x}}' = \left[\underline{\underline{R}}_x - \frac{\underline{t}\, \underline{n}^T}{d}\right] \underline{\tilde{x}} \qquad (Q4.5)$$

Si la translation est nulle → $\underline{t} = [0 \;\; 0 \;\; 0]^T$ et (Q4.5) s'écrit :

$$\boxed{\underline{\tilde{x}}' = \underline{\underline{R}}_x\, \underline{\tilde{x}}} \qquad (Q4.6)$$

b) Comme (Q4.6) n'est qu'une rotation, l'homographie n'a que 3 degrés de liberté.

c) a) Si la rotation est nulle, (24.5) devient :

$$\tilde{\underline{x}}' = \left[\underline{\underline{I}} - \frac{\underline{t}\,\underline{n}^T}{d} \right] \tilde{\underline{x}}$$

b) avec $\underline{t} = [0 \; t_y \; 0]^T$ et $\underline{n} = [0 \; n_y \; n_z]^T$ on a que, avec le résultat de C)a)

$$\tilde{\underline{x}}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ t_x \\ 0 \end{bmatrix} [n_x \; n_y \; n_z]$$

$$\tilde{\underline{x}}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-n_y t_y & -n_z t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{\underline{x}}$$

c) Si le plan est perpendiculaire à l'axe optique, on a $[n_x \; n_y \; n_z]^T = [0 \; 0 \; 1]^T$

Pour des points $[u \; v \; 1]^T$ sur l'image $\tilde{\underline{x}}$, on a pour leurs correspondants dans l'image $\tilde{\underline{x}}'$

$$\tilde{\underline{x}}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\underline{x}}' = \begin{bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v - t_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

qui n'est qu'une copie de $\tilde{\underline{x}}$ ayant subi une translation.