

Date 22 octobre 2015
Local PLT-2548
Heure 13h30 à 16h20

Examen partiel 1 A2015

Toute documentation
permise sauf Internet

Question 1. Transformations de coordonnées (15 points au total)

Supposons deux repères de coordonnées O_1 et O_2 initialement confondus tel que montré à la Figure 1 (a). Le repère O_2 subit une translation $[t_x, t_y, 0]^t$ dans O_1 . Une rotation de θ degrés autour de l'axe des z est ensuite appliquée au repère ayant subi une translation pour conduire au repère O_3 , tel que montré à la Figure 1 (b).

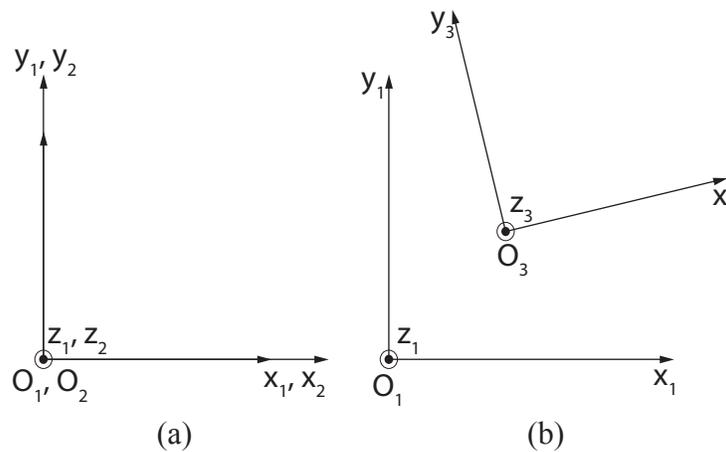


Figure 1. Géométrie de la Question 1. (a) Référentiels confondus. (b) Référentiels une fois que O_2 ait subi une translation puis une rotation pour devenir O_3 .

Supposons que la matrice de transformation de repères permettant de passer du repère O_1 au repère O_3 est donnée par la matrice en notation homogène de l'équation (1).

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -t_y \\ -1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

- A. (10 points) Sachant qu'un point $p_1 = [1, 1, 0, 1]^t$ est transformé en $p_3 = [-1, 2, 0, 1]^t$, que valent t_x , t_y et θ ?
- B. (5 points) Quel est le quaternion associé à la rotation de θ degrés?

Question 2. Projection de perspective (30 points au total)

Supposons le sténopé montré à la Figure 2. Le sténopé est non-inverseur de focale f .

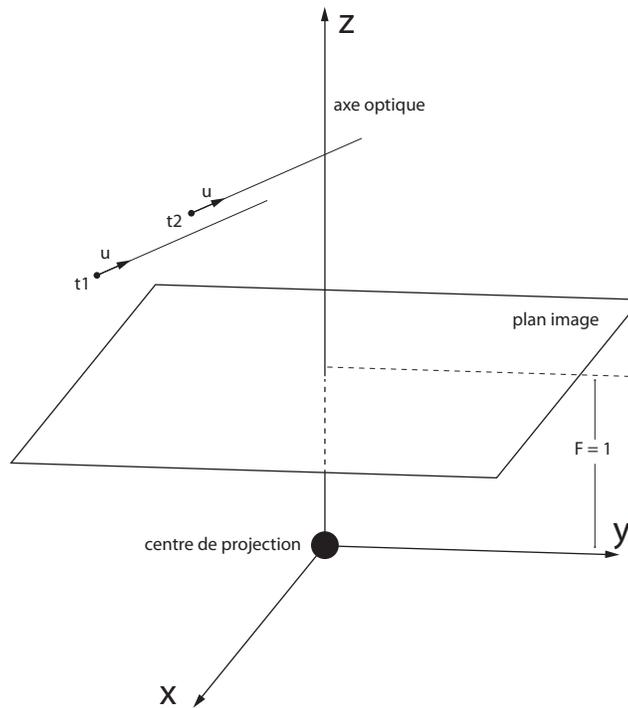


Figure 2. Sténopé de la Question 2. Le sténopé est non-inverseur de focale égale à 1.

Supposons deux droites parallèles v_1 et v_2 d'orientation u exprimées dans le repère cartésien du sténopé et dont les équations paramétriques sont données par l'équation (2) et l'équation (3) pour la droite 1 et la droite 2 respectivement. Le vecteur u est unitaire.

$$v_1 = t_1 + \lambda u \quad (2)$$

$$v_2 = t_2 + \beta u \quad (3)$$

A. (5 points) Quelle est la matrice de projection de perspective en notation homogène pour le sténopé de la Figure 2?

B. (10 points) Donnez les expressions des coordonnées images en notation réelle (v'_{1x} , v'_{1y}) et (v'_{2x} , v'_{2y}) de points sur les droites lorsque projetés sur le plan image de la caméra.

C. (10 points) Supposons que:

$$t_1 = [0 \ 0 \ 3]^t, t_2 = [0 \ 2 \ 3]^t, u = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}^t$$

A quelles coordonnées (v'_x , v'_y) les projections des droites se rencontrent-elles? Expliquez votre réponse.

D. (5 points) Supposons maintenant que:

$$t_1 = [0 \ 2 \ 2]^t, t_2 = [0 \ 2 \ 3]^t, u = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^t$$

Dans ce cas, à quelles coordonnées (v'_x, v'_y) les projections des droites se rencontrent-elles? Expliquez votre réponse.

Question 3. Projection de perspective (30 points au total)

Supposons un montage formé de deux sténopés non-inverseurs C_1 (d'axes x_1 - y_1 - z_1) et C_2 (d'axes x_2 - y_2 - z_2) dans le repère global X_w - Y_w - Z_w . Pour les trois référentiels, l'axe des x entre dans la feuille. Les deux sténopés ont une focale $F = 1$.

Le repère de la caméra C_1 a subi une rotation de $-\theta$ degrés par rapport à l'axe des x tandis que le repère de la caméra C_2 a subi une translation de T dans le repère global suivie d'une rotation de θ autour de l'axe des x du repère ayant subi la translation. L'arrangement des deux sténopés est montré à la Figure 3.

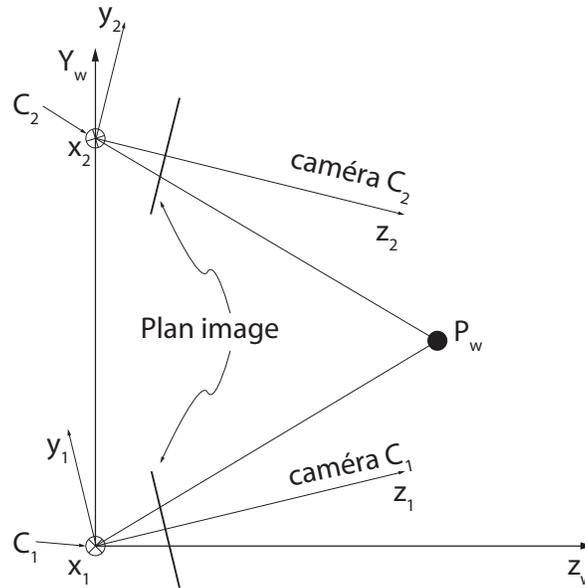


Figure 3. Géométrie de la Question 3 montrant les deux sténopés dans le repère global.

- A. (5 points) Quelle est la matrice caméra en notation homogène des deux sténopés permettant de calculer les coordonnées images dans C_1 et C_2 d'un point P_w dont les coordonnées sont exprimées dans le référentiel global? Expliquez votre réponse.
- B. (5 points) Quelles sont les coordonnées images de la projection du centre de projection de la caméra C_1 dans le plan image de la caméra C_2 ? Cette intersection s'appelle l'épipôle.
- C. (5 points) Quelles sont les coordonnées images de la projection du centre de projection de la caméra C_2 dans le plan image de la caméra C_1 ? Cette intersection s'appelle l'épipôle.
- D. (5 points) Que deviennent les coordonnées des épipôles calculées en B et C quand la valeur de θ est 0 degrés? Expliquez votre réponse.
- E. (5 points) Que deviennent les coordonnées des épipôles calculées en B et C quand la valeur de θ est 90 degrés? Expliquez votre réponse.

F. (5 points) Dans le repère global, les points C_1 , C_2 et P_w forment un plan. Supposons que le Point P_w se déplace verticalement tel que montré à la Figure 4 pour le sténopé C_1 .

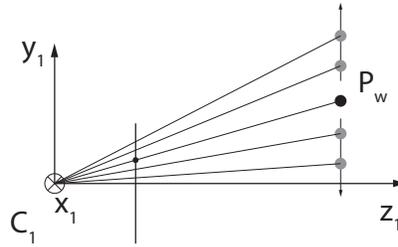


Figure 4. Différentes positions du Point P_w projeté sur le plan image du sténopé C_1

Pour chaque position du point P_w dans l'espace, le plan formé de C_1 - C_2 et P_w intersecte les plans images de C_1 et C_2 en une droite. Tracez l'allure de ces droites pour chaque plan image (plan x_1 - y_1 et x_2 - y_2). Expliquez votre réponse.

Question 4. (25 points au total) Homographies

Supposons l'arrangement géométrique de deux sténopés non-inverseurs de focale $F = 1$ de la Figure 5.

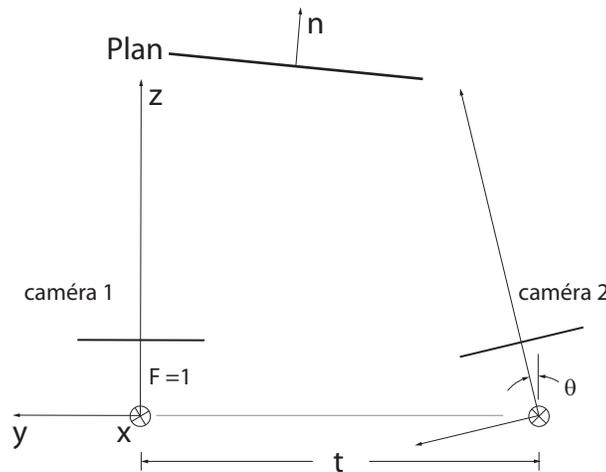


Figure 5. Géométrie de la Question 4.

Le plan de normale n induit une homographie entre les deux images. L'expression pour l'homographie est donnée par l'équation (4). Dans ce cas, on suppose que le repère global est confondu avec celui de la caméra 1.

$$\lambda I_2 = R_x(\theta) - \frac{tn^t}{d} I_1 \tag{4}$$

Dans l'équation (4), R_x représente la matrice de rotation de la caméra 2 par rapport à la caméra 1 (ici, la rotation ne se fait qu'autour de l'axe des x qui entre dans la page). Le vecteur t représente la translation entre les caméras (qui se fait ici selon l'axe des y du repère monde), n est le vecteur unitaire normal au plan et d est la distance entre le plan et l'origine du repère monde.

A. (5 points) Quelle est l'expression générale de la matrice d'homographie si la rotation de la caméra 2 autour de l'axe des x est $\theta = -\gamma$ degrés (i.e. la situation montrée à la Figure 5)?

B. (8 points) Quelle est l'expression de l'homographie si $\theta = 0$ degrés, $d = 1$, $t = [0, -t, 0]^t$ et $n = [0,$

0, 1]°? Donnez également les coordonnées images dans le plan image de la caméra 2 du point image de coordonnées $[I_{x1}, I_{y1}]^t$ dans l'image 1. Expliquez votre réponse.

C. (8 points) Quelle est l'expression de l'homographie si $\theta = 0$ degrés, $d = 1$, $t = [0, -t, 0]^t$ et $n = [0, \cos(45^\circ), \cos(45^\circ)]^t$? Donnez également les coordonnées images dans le plan image de la caméra 2 du point image de coordonnées $[I_{x1}, I_{y1}]^t$ dans l'image 1. Expliquez votre réponse.

D. (4 points) Que devient la matrice d'homographie donnée en A si $d \gg t$? Expliquez votre réponse.