

Date 26 octobre 2017  
Local PLT-2546

Examen partiel 1 A2017

Toute documentation  
permise sauf Internet et  
Matlab

Heure 13h30 à 16h20

**Question 1. (25 points) Transformations rigides**

Un pilote d'avion doit changer de corridor pour éviter des perturbations. Le contrôleur aérien sait que le point T dans le repère  $X_t$ - $Y_t$ - $Z_t$  de la tour de contrôle devrait permettre à l'avion d'éviter ces perturbations. Le contrôleur conseille au pilote d'effectuer une translation de  $t_y$  dans le repère de l'avion, d'effectuer une rotation de  $\theta$  degrés puis d'effectuer une translation  $t_y'$ , de tourner de  $-\theta$  degrés et d'effectuer une dernière translation  $t_y''$ . Chaque transformation (translation ou rotation) est effectuée dans le repère de la transformation précédente. La Figure 1 montre la séquence des transformations.

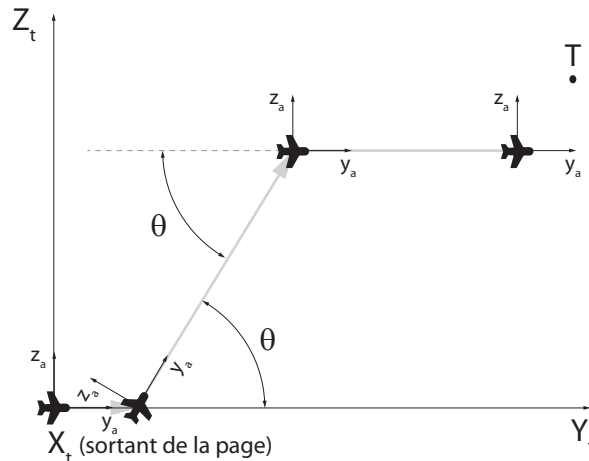


Figure 1. Transformations de la Figure 1.

A. (10 points)

Donnez l'équation de transformation globale, sans expliciter le contenu des matrices de transformation, permettant au pilote de connaître les coordonnées du point T dans le repère de coordonnées de l'avion ( $x_a$  -  $y_a$  -  $z_a$ )

B. (10 points)

Explicitez les matrices de l'expression fournie en A.

C. (5 points)

Comment le pilote sait-il s'il a atteint le point T?

**Question 2. (25 points) Formation des images et sténopé**

Soit la Figure 2 montrant un sténopé non-inverseur sur lequel sont imagés deux points  $P_1$  et  $P_2$  aux points images  $p_1$  et  $p_2$  respectivement.

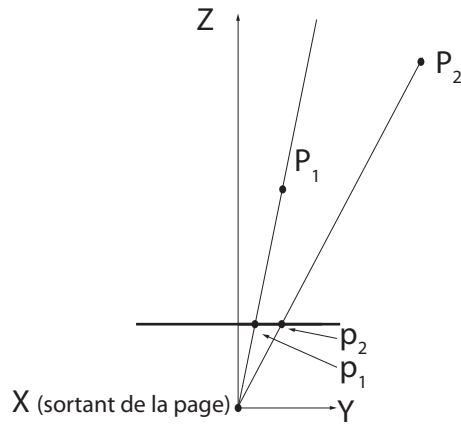


Figure 2. Géométrie de la Question 2.

Si les coordonnées du point objet  $P_1$  sont (0 m, 0.5 m, 2 m) et que son image  $p_1$  est à (0m, 0.003m), quelles sont les coordonnées du point  $P_2$ , dont la coordonnée selon l'axe des Y est 0.75m, et dont l'image  $p_2$  est à (0, 0.00225m) ? Expliquez le raisonnement suivi pour arriver à la réponse.

**Question 3. (25 points) Projection de perspective**

Soit la géométrie de la Figure 3 montrant deux sténopés  $c_1$  et  $c_2$  de focale 1. Le sténopé  $c_2$ , initialement confondu avec  $c_1$ , a premièrement subi une translation de  $d = 1$  selon l'axe des  $y_1$  et ensuite une rotation de  $\theta$  par rapport à l'axe des  $x$  du repère ayant subi la translation. Le point  $P_1$  de coordonnées (0,4,20)<sup>t</sup> dans le repère du sténopé  $c_1$ , a pour image  $p_1 = (0,1/5)^t$  sur le plan image de  $c_1$  et  $p_2 = (0,23/17)^t$  sur le plan image de  $c_2$ . Considérez que les unités sont normalisées.

De quel angle  $\theta$  le sténopé  $c_2$  a-t-il été tourné? Expliquez votre raisonnement.

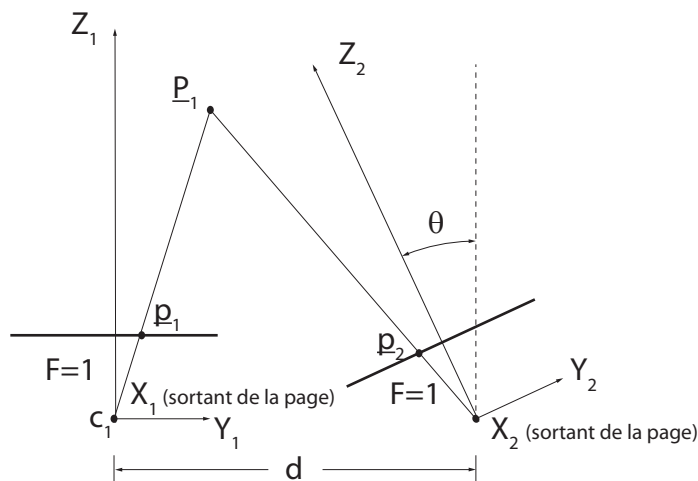


Figure 3. Géométrie de la Question 3.

**Question 4. Homographies (25 points)**

**A.** (10 points au total) Dérivation de l'homographie.

Dans cette partie de la question, vous allez développer une approche de formulation de l'homographie entre deux plans.

Soit le schéma de la montrant un plan  $\Pi$  (en rouge) dans le repère monde  $(x_w, y_w, z_w)$  sur lequel les points  $\underline{P}_0, \underline{P}_1, \underline{P}_2, \underline{P}_3$  reposent.

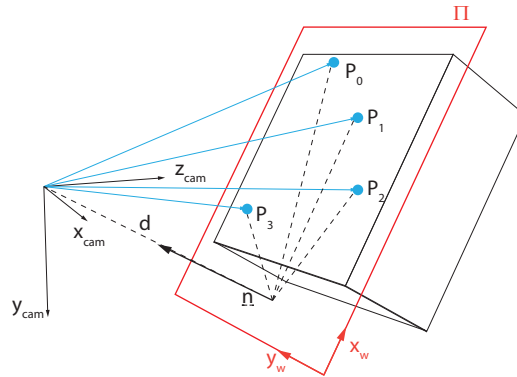


Figure 4. Géométrie de la Question 4 A.

L'expression de l'éq. (1) représente le changement de repère (en coordonnées réelles) entre le repère caméra  $x_{cam} - y_{cam} - z_{cam}$  et le repère monde.

$$\underline{P}_w = \underline{R} \underline{P}_{cam} + t \quad (1)$$

Dans le repère monde, les points  $\underline{P}_i$  vérifient l'équation du plan  $\Pi$  donnée par l'éq. (2) en coordonnées réelles.

$$\underline{n}_w^t \underline{P}_{i-w} = 0 \quad (2)$$

a) (4 points)

Que devient (2) si on remplace (1) dedans?

b) (3 points)

Dans le repère caméra, l'équation du plan est donnée par l'éq. (3)

$$\underline{n}_{cam}^t \underline{P}_{i-cam} + d = 0 \quad (3)$$

Montrez que

$$\underline{t} = t * (1) = t \left( -\frac{\underline{n}_{cam}^t \underline{P}_{i-cam}}{d} \right) \quad (4)$$

en utilisant la Figure 4. Justifiez votre réponse.

c) (3 points)

En utilisant l'éq. (4) et le résultat de a) dérivez l'expression de l'homographie entre  $\underline{P}_w$  et  $\underline{P}_{cam}$  en montrant qu'elle correspond à l'éq. (5).

$$\underline{\underline{R}} - \frac{\underline{\underline{t}} \underline{\underline{n}}'}{d} \quad (5)$$

**B.** (6 points au total)

Supposons que l'homographie entre deux plans images des sténopés  $c$  et  $c'$  avec  $\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{K}}' = \underline{\underline{I}}$  est donnée par l'éq. (6).

$$\underline{\underline{x}}' = \left[ \underline{\underline{R}} - \frac{\underline{\underline{t}} \underline{\underline{n}}'}{d} \right] \underline{\underline{x}} \quad (6)$$

a) (3 points)

Si la translation entre les sténopés  $c$  et  $c'$  est nulle, qu'obtient-on pour l'homographie?

b) (3 points)

Une homographie générale comme celle de l'éq. (6) comprend généralement 8 degrés de liberté. Combien de degrés de liberté l'homographie de a) possède-t-elle? Justifiez votre réponse.

**C.** (9 points au total)

Supposons maintenant la situation de la Figure 5 pour les sténopés  $c$  et  $c'$ .

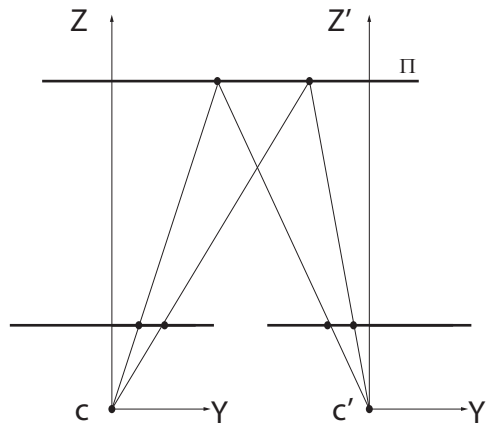


Figure 5. Géométrie de la Question 4 C.

On remarque que, dans ce cas, la rotation est nulle entre les deux sténopés.

a) (3 points)

Quelle est l'expression de l'homographie dans ce cas?

b) (3 points)

Supposons maintenant que  $\underline{\underline{t}} = [0 \ t_y \ 0]^t$  et que  $\underline{\underline{n}} = [0 \ n_y \ n_z]^t$ . Donnez l'expression de l'homographie.

c) (3 points)

Pour les points du sténopé  $c$  ayant les coordonnées homogènes  $[0 \ v \ 1]^t$ , que devient l'homographie trouvée en b) quand le plan est perpendiculaire à l'axe optique (i.e.  $\underline{\underline{n}} = [0 \ 0 \ 1]^t$ ) et en quelles sont les coordonnées de  $\underline{\underline{x}}'$ ? Expliquez votre réponse.