VISION NUMÉRIQUE
GIF-4100 / 7001

SOLUTION DEVOIR RADIOMÉTRIE

QUESTION 1) Surface grise

L'illuminance reçue de la source par le disque 1 est donnée par :

$$dE_{d1} = \frac{d\Phi_1}{dA_{d1}} = \frac{I\, d\omega_1}{dA_{d1}} \qquad (1)$$

ici

$$d\omega_1 = \frac{A_{d1}\cos\theta_1}{R_1^2} = \frac{\pi R_{d1}^2 \cos\theta_1}{R_1^2} \qquad (2)$$

avec

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{z_s}{x_s}\right) \qquad (3)$$

Donc

$$dE_{d1} = \frac{I\cos\theta_1}{R_1^2} \quad \text{avec } R_1 = \sqrt{x_s^2 + z_s^2} \qquad (4)$$

La BRDF (albédo) de la surface grise est donnée par

$$L_{d1} = \frac{\rho}{\pi}\, dE_{d1}$$

et donc

$$L_{d1} = \frac{\rho\, I\cos\theta_1}{\pi R_1^2} \qquad (5)$$

Le flux reçu par le disque 2 ne provient que du disque 1 car la surface du disque 2 ne voit pas directement la source. On a donc

$$d^2\Phi_{d2} = L_{d1} A_1 \cos\theta_2\, d\omega_2 \qquad (6)$$

Ici

$$d\omega_2 = \frac{\pi R_{d2}^2 \cos\theta_2}{R_2^2} \qquad (7)$$

avec

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{z_{d2}}{x_{d2}}\right)$$

L'illuminance sur le disque 2 est donnée par :

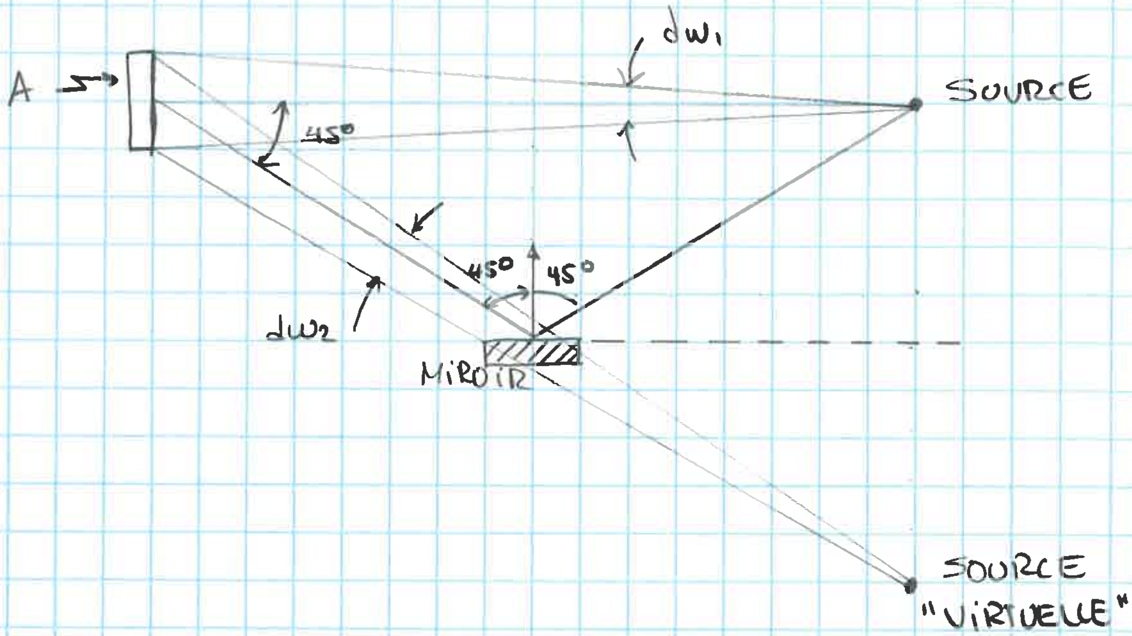
$$dE_{d2} = d\left(\frac{d\Phi_2}{dA_2}\right) = L_{d1} \frac{A\cos\theta_2 \, \pi \cancel{R_{d2}^2} \cos\theta_2}{R_2^2 \, \cancel{\pi R_{d2}^2}}$$

$$dE_{d2} = \rho \, I \cos\theta_1 \cos^2\theta_2 \left[\frac{R_{d1}}{R_1 R_2}\right]^2$$

L'albedo est donc, en fonction des quantités connues du problème,

$$\boxed{\rho = \frac{dE_{d2}}{I} \; \frac{1}{\cos\theta_1 \cos\theta_2} \left[\frac{R_1 R_2}{R_{d1}}\right]^2}$$

QUESTION 2) Réflexion sur un miroir.



On a

$$d\Phi_1 = I\,d\omega_1 \qquad d\omega_1 = \frac{dA}{d_1^2} \quad \text{avec } d_1 = 2\,m$$

$$d\Phi_2 = I\,d\omega_2, \qquad d\omega_2 = \frac{dA\cos\theta}{d_2^2} \quad \text{avec } \theta = 45° \quad d_2 = 2\sqrt{2}\,m$$

CHANGEMENT

$$E_{TOT} = \frac{d\Phi_1 + d\Phi_2}{dA} = \frac{I\cancel{dA}}{\cancel{dA}\,d_1^2} + \frac{I\cancel{dA}\cos\theta}{\cancel{dA}\,d_2^2} = I\left[\frac{1}{d_1^2} + \frac{\cos\theta}{d_2^2}\right]$$

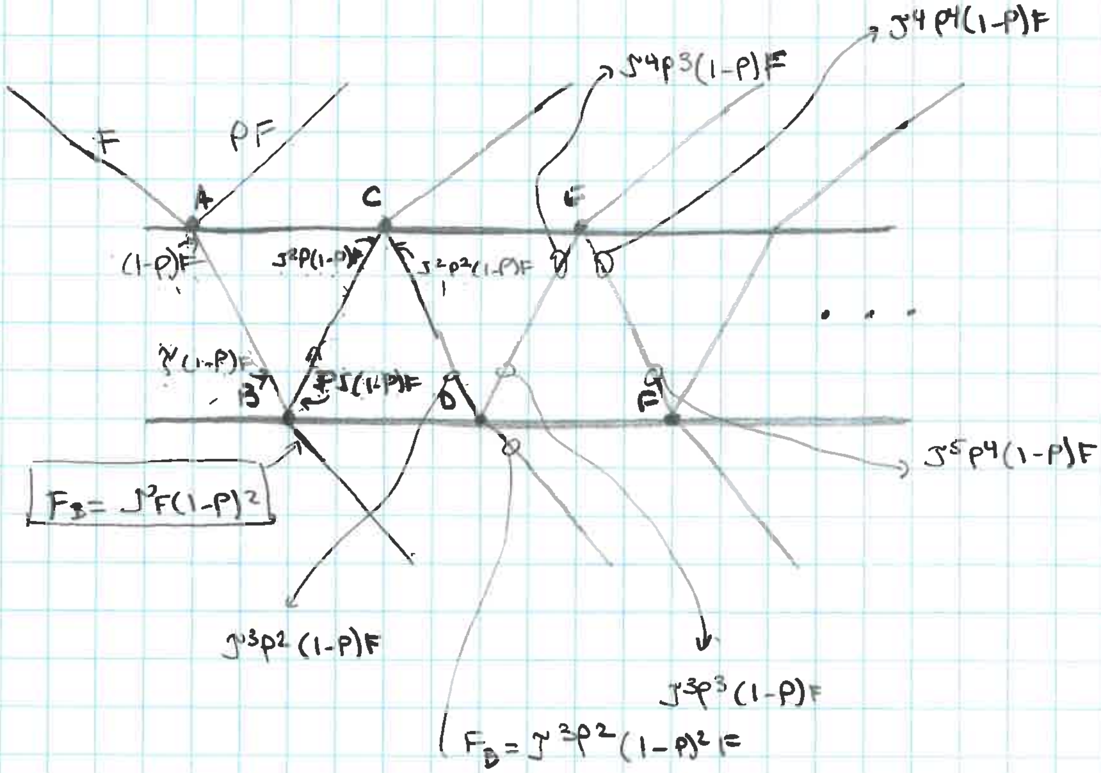
le cos θ manquait

$$E_{TOT} = 1000\left[\frac{1}{4} + \frac{0.71}{8}\right]$$

$$E_{TOT} = 338\ \text{lm}$$

QUESTION 3) Réflexion et transmission

On a la situation suivante :



Donc, pour la face inférieure, on a

$$F_{émis} = F_B + F_D + F_F + \ldots$$

$$F_{émis} = \tau(1-\rho)^2F + \tau^3\rho^2(1-\rho)^2F + \tau^5\rho^4(1-\rho)^2F + \ldots$$

$$F_{émis} = \tau(1-\rho)^2F(1 + \tau^2\rho^2 + \tau^4\rho^4 + \ldots)$$

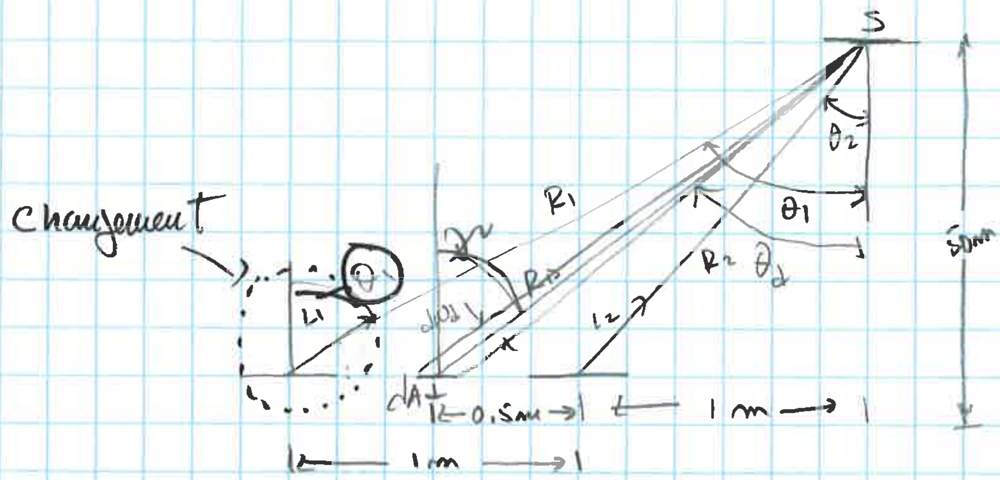
or

$$1 + a^2r^2 + a^4r^4 + a^6r^6 + \ldots = \frac{1}{(1-a^2r^2)}$$

donc

$$\boxed{F_{émis} = \frac{\tau(1-\rho)^2}{(1-\tau^2\rho^2)}F}$$

QUESTION 4) Détecteur lumineux



Soit

dE_1 : illuminance reçue de P_1 par S

dE_2 : illuminance reçue de P_2 par S

Par la loi de l'inverse du carré on a

$$dE_1 = L_1 \underbrace{\frac{dS_{P1}\cos\theta_1}{R_1^2}}_{\text{angle solide}} \underbrace{dS_1\cos\theta_1}_{\text{surface projetée}} \frac{1}{dS_1}$$

$$dE_1 = \frac{L_1\, dS_{P1}\cos^2\theta_1}{R_1^2}$$

de même pour dE_2

$$dE_2 = \frac{L_2\, dS_{P2}\cos^2\theta_2}{R_2^2}$$

Ici

$\theta_1 = \text{arctg}(50/2) = 87.7°$ $\qquad$ $\theta_2 = \text{arctg}(50/1) = 88.8°$

$R_1 = \sqrt{50^2+2^2} = 50.04\,m$ $\qquad$ $R_2 = \sqrt{50^2+1^2} \simeq 50\,m$

De plus

$$dS_{p1} = \frac{\pi \, dia_{p1}^2}{4} = \frac{\pi (0.1)^2}{4} = 7.8 \times 10^{-3} \, m^2$$

$dS_{p2} = dS_{p1}$ car les plaques sont identiques

Donc

$$dE_1 = 2 \times 10^{-7} \, lm \qquad dE_2 = 6.9 \times 10^{-8} \, lm$$

$$dE_s = 26.9 \times 10^{-8} \, lm$$

Le panneau est lambertien, c'est donc que sa BRDF est $1/\pi$ et que la luminance émise vers le détecteur est par définition de P:

$$P = \frac{dL_E}{dE_S}$$

et pour une surface Lambertienne $P = \frac{1}{\pi}$ et donc, la luminance du panneau en direction du détecteur est de

$$dL_e = \frac{1}{\pi} dE_S$$

$$dL_e = \frac{26.9 \times 10^{-8}}{\pi}$$

$$dL_e = 8.57 \times 10^{-8}$$

L'illuminance sur le détecteur est

$$dE_d = dL_e \, d\omega_d \, S\cos\theta_d$$

Ici

$$d\omega_d = \frac{dA_d \cos\theta_d}{R_d^2}$$

et donc

$$dE_d = \frac{dL_e \, dA_d \, S \cos^2\theta_d}{R_d^2}$$

De plus

$$dA_d = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (0.02)^2}{4} = 3.14 \times 10^{-4} \, m^2$$

l'aire du panneau est

$$S = \frac{\pi (0.05)^2}{4} = 1.96 \times 10^{-3}$$

L'angle θ_d est donné par

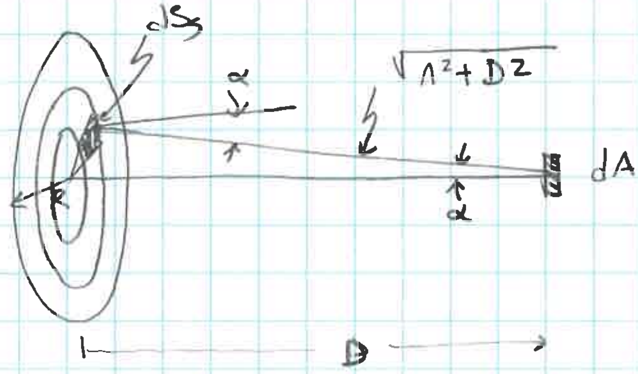
$$\theta_d = \text{arctg } 1.5/50 = 1.72^\circ$$

On a donc

$$dE_d = \frac{8.57 \times 10^{-8} \times 3.14 \times 10^{-4} \times 1.96 \times 10^{-3} \, (\overbrace{\cos^2 1.72}^{\approx 1})}{\sqrt{1.5^2 + 50^2}} \rightarrow \text{Changement. Pas de } \sqrt{\ } \text{ au dénominateur}$$

$$\boxed{dE_d = 2 \times 10^{-17} \text{ lm}}$$

QUESTION 5) Source distribuée



A) l'aire de l'élément différentiel de surface sur le disque est

$$dS_s = r\, d\theta\, dr \quad (1)$$

De plus

$$\cos\alpha = \frac{D}{\sqrt{r^2+D^2}} \quad (2)$$

Par la loi de l'inverse du carré on a que le flux reçu par dA de l'élément de surface dS_s est:

$$d^2\phi = \frac{L\, dA \cos\alpha \;\; dS_s \cos\alpha}{r^2+D^2} \quad (3)$$

avec (1) et (2), (3) devient:

$$d^2\phi = \frac{L \cos^2\alpha \; r\, d\theta\, dr}{r^2+D^2} = L \frac{D^2}{(r^2+D^2)^2} r\, d\theta\, dr\, dA$$

L'illuminance sur dA est:

$$dE = \frac{d^2\phi}{dA} = L \frac{D^2 r}{\sqrt{r^2+D^2}} d\theta\, dr$$

L'anneau fournit donc une illuminance de

$$dE = \int_0^{2\pi} L\, D^2 \frac{r}{(r^2+D^2)^2}\, dr\, d\theta$$

$$\boxed{dE = 2\pi L D^2 \frac{r}{(r^2+D^2)^2}}$$

B) Pour le disque, il faut intégrer le résultat de A) en fonction de r

$$E = \int_0^R 2\pi L D^2 \frac{r}{(r^2+D^2)^2}\, dr$$

Posons

$$u = r^2 + D^2$$

$$du = 2r\,dr \rightarrow r\,dr = du/2$$

si $r = 0$, $u = D^2$
$r = R$, $u = R^2 + D^2$

donc

$$E = 2\pi L D^2 \frac{1}{2} \int_{D^2}^{R^2+D^2} \frac{du}{u^2} = \frac{2\pi L D^2}{2} \left[-u^{-1} \Big|_{D^2}^{R^2+D^2} \right]$$

$$E = \pi L \frac{R^2}{R^2+D^2}$$

C) si $R \ll D$

$$\rightarrow \frac{R^2}{R^2+D^2} = \frac{R^2}{R^2(1+D^2/R^2)} \sim \frac{R^2}{D^2}$$

et

$$E = \frac{\pi R^2}{D^2} L$$

qui est la loi de l'inverse du carré pour un disque de faibles dimensions éclairant dA.