GIF-4100/7001 Partiel 1
Solution

Question 1) on a $\underline{X}_w = \underline{\underline{T}}\,\underline{X}_{cam}$ avec

$$\tilde{\underline{\underline{T}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donc $\tilde{\underline{X}}_{cam} = \tilde{\underline{\underline{T}}}^{-1}\tilde{\underline{X}}_w$

La projection de perspective se fait avec la matrice $\underline{\underline{P}}$

$$\tilde{\underline{\underline{P}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/F & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

on a donc $\tilde{\underline{X}}_{cam} = \tilde{\underline{\underline{P}}}\,\tilde{\underline{\underline{T}}}^{-1}\tilde{\underline{X}}_w$

ici $\underline{A}_w = [0 \;\; 10 \;\; 4]^T$ et $h_w = [3 \;\; 8 \;\; 1.8]^T$

$$\Rightarrow \tilde{\underline{X}}_c = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{T}}^{-1}\tilde{\underline{X}}_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 20 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{\underline{X}}_w \Rightarrow \text{pour } \tilde{\underline{A}}_w \Rightarrow \tilde{\underline{A}}_c = [9 \;\; 10 \;\; 2 \;\; 201]^T$$

$$\tilde{\underline{h}}_w \Rightarrow \tilde{\underline{h}}_c = [0 \;\; 8 \;\; 0.2 \;\; 161]^T$$

$$\Rightarrow \underline{A}_c = [-0.015 \;\; 0.05 \;\; 0.01]^T \text{ et } \underline{h}_c = [0 \;\; 0.05 \;\; -0.0012]^T$$

Question 2) Projection de perspective

A) $\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & u_0 \\ 0 & \beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = S_x F \quad \beta = \frac{S_y f}{\sin\theta} \quad \gamma = -S_x F \cot\theta$, ici $\theta = 90° \rightarrow \gamma = 0$ et

$$\alpha = S_x F \quad \beta = S_y F$$

on a 640 colonnes à 10×10^{-6} mm par pixel $\rightarrow S_x = \frac{640 \text{ pixel}}{640 \times 10 \times 10^{-6} m} = 10^5 \frac{\text{pixels}}{m}$

$\alpha = 10^5 \frac{\text{pixels}}{m} \times 10 \times 10^{-3} m = 10^3$

de même $\beta = 10^3$

$u_0 = 320$ et $v_0 = 240$

$$\Rightarrow \underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 10^3 & 0 & 320 \\ 0 & 10^3 & 240 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

B) $\begin{bmatrix} su \\ sv \\ s \end{bmatrix} = \underline{\underline{K}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^3 & 0 & 320 \\ 0 & 10^3 & 240 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -75 \\ 65 \\ 410 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} u = 137 \\ v = 398 \end{matrix}}$

C) ici, $\underline{\underline{\tilde{R}}} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ et $\underline{t} = [0\ 0\ 0]^T$

on a donc $\underline{\underline{K}} [R^T \ -R^T t] \Rightarrow \begin{bmatrix} su \\ sv \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & u_0 \\ 0 & \beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$ et donc:

$u = \frac{\alpha x + u_0 z}{z}$ et $v = \frac{\beta y + v_0 z}{z} \Rightarrow$ les équations des droites

sont $\alpha x + (u - u_0) z = 0$ et $\beta y + (v_0 - v) z = 0$ si $z = 700$ on a

$1000 x + (320 - 200) \times 700 = 0$ et $1000 y + (240 - 300) \times 700 = 0$

$\Rightarrow x = (200 - 300) 0.7 = -84$

$y = (300 - 240) 0.7 = 42$

$z = 700$

d) En coordonnés non-homogènes, on a $X_{cam} = {}^{cam}R_{cible} X_{cible} + t$

donc ${}^{cible}R_{cam} = {}^{cam}R_{cible}^{-1} = {}^{cam}R_{cible}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2\sqrt{2}/3 \\ 0 & -2\sqrt{2}/3 & 1/3 \end{bmatrix}$

Question 3)

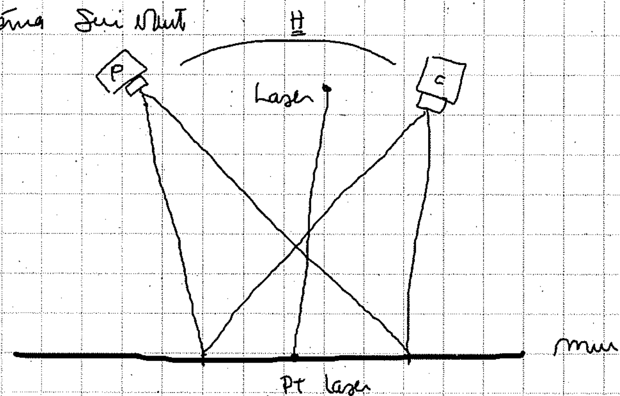
A) 9 paramètres, 1 facteur d'échelle → 8 variables
on a 2 équations par point → 4 points pour 8 équations et 8 in

B) on a

$$\alpha\begin{bmatrix}u_1\\v_1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}h_{11}&h_{21}&h_{31}\\h_{12}&h_{22}&h_{32}\\h_{13}&h_{23}&h_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_2\\v_2\\1\end{bmatrix}\Rightarrow\quad u_1=\frac{h_{11}u_2+h_{12}v_2+h_{13}}{h_{31}u_2+h_{32}v_2+h_{33}},\quad v_1=\frac{h_{21}u_2+h_{22}v_2+h_{23}}{h_{31}u_2+h_{33}v_2+h_{33}}$$

C) $(h_{31}u_1-h_{11})u_2+(h_{32}u_1-h_{12})v_2+(h_{33}u_1-h_{13})=0$, de même pour l'autre équation
↳ **droite.**

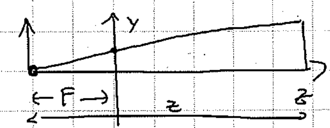
d) on a le schéma suivant



Si on projette un patron de calibrage sur le plan (mur) avec le projecteur et qu'on observe le patron avec la caméra, on peut établir des correspondances et estimer l'homographie entre le projecteur et la caméra. Par la suite, on cesse de projeter le patron de calibrage et on allume le laser.
La caméra détecte les coordonnées image du laser, transfère ces coordonnées dans le repère du projecteur grâce à $\underline{\underline{H}}$. Les coordonnées transférées nous indiquent à quel endroit du projecteur il faut allumer un point dont les coordonnées sur le plan du mur coïncideront avec celles du laser.

Question 4)

a) On a



$$x_p = \frac{XF}{Z} = F\left(\frac{a_1+\lambda b_1}{a_3+\lambda b_3}\right) \quad \text{et} \quad y_p = \frac{YF}{Z} = \left(\frac{a_2+\lambda b_2}{a_3+\lambda b_3}\right)F$$

b) Si $\lambda \to \infty$

$$x_p = F\left(\frac{b_1 + a_1/\lambda}{b_3+a_3/\lambda}\right) = Fb_1/b_3 \quad \text{et} \quad y_p = F\left(\frac{b_2+a_2/\lambda}{b_3+a_3/\lambda}\right) = Fb_2/b_3$$

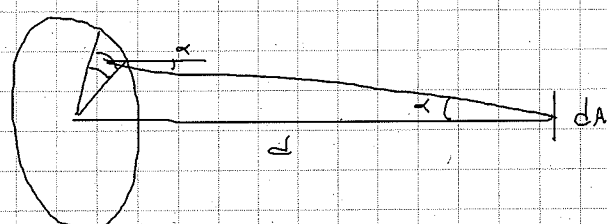
c) Oui. D'après b), on a

$x_p = Fb_1/b_3 \Rightarrow b_1 = \frac{x_p b_3}{F}$ et $y_p = Fb_2/b_3 \to b_2 = \frac{y_p b_3}{F}$

de plus $\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2} = 1 \Rightarrow b_3 = 1/\sqrt{1+x_p^2+y_p^2}$ qu'on remplace dans les expressions ci-dessus pour b_1 et b_2 en fonction de b_3.

Question 5)

1)



On a $d^2\Phi = L\,d\omega\,dA\cos\alpha = \frac{L\, r\,dr\,d\theta \cos^2\alpha\, dA}{(r^2+d^2)}$. Ici, $\cos\alpha = d/\sqrt{r^2+d^2}$

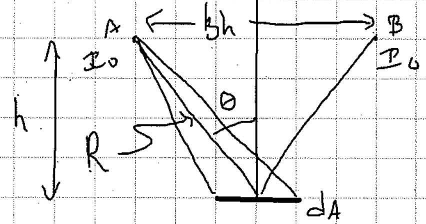
donc $dE = d\left(\frac{d\Phi}{dA}\right) = \frac{L\,r\,dr\,d\theta\, d^2}{(r^2+d^2)^2}$ pour l'élément de surface différentiel.

Pour le disque au complet on a $E = \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{Ld^2\, r\,dr\,d\theta}{(r^2+d^2)^2} = Ld^2\int_0^{2\pi}\left[\frac{-1}{2(r^2+d^2)}\Big|_0^R\right]d\theta$

$\Rightarrow Ld^2\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2(R^2+d^2)}+\frac{1}{2d^2}\right]d\theta = Ld^2\int_0^{2\pi}\left[\frac{-\cancel{2d^2}+2R^2+\cancel{2d^2}}{4d^2(R^2+d^2)}\right]d\theta$

$\Rightarrow Ld^2\int_0^{2\pi}\frac{R^2}{2(R^2+d^2)}d\theta \Rightarrow Ld^2\frac{R^2}{\cancel{2}(R^2+d^2)}\times\cancel{2}\pi \Rightarrow \boxed{E = \pi L R^2 d^2/(R^2+d^2)}$

b)



On a que

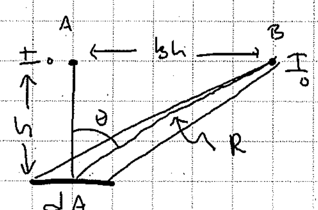
$d\Phi_{dA} = d\Phi_A + d\Phi_B = 2\, d\Phi_A$ par symétrie

$d\Phi_{dA} = 2 I_0\, d\omega = 2 I_0 \frac{dA \cos\theta}{R^2}$, ici $R = \sqrt{\left(\frac{bh}{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{\frac{b^2h^2}{4} + h^2} = \frac{h}{2}\sqrt{1+b^2}$

et $\cos\theta = h/R = \frac{2}{\sqrt{1+b^2}}$

donc $\boxed{dE_A = \frac{16\, I_0}{h^2(1+b^2)^{3/2}}}$

c)



$d\Phi_{dA} = d\Phi_A + d\Phi_B = I_0\, d\omega_A + I_0\, d\omega_B = I_0 \frac{dA}{h^2} + \frac{I_0\, dA \cos\theta}{R^2}$, ici $\cos\theta = \frac{h}{\sqrt{h^2 + b^2h^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}$

et $R = \sqrt{h^2 + h^2b^2} = h\sqrt{1+b^2} \Rightarrow d\Phi_{dA} = \frac{I_0\, dA}{h^2} + \frac{I_0\, dA}{\sqrt{1+b^2} \times h^2(1+b^2)}$

$\boxed{dE_{dA} = I_0\left[\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^2(1+b^2)^{3/2}}\right]}$

d) → on fait le rapport entre les résultats

$\boxed{\rho = \frac{16}{1 + (1+b^2)^{3/2}}}$

pour $z=1$ on a

$$dE_{dA, z=1} = \frac{\delta I_0}{\sqrt{2} h^2}$$

$$dE_{dA, z=2} = \frac{\delta I_0}{\sqrt{5} h^2}$$