# INTRODUCTION À LA VISION NUMÉRIQUE
## GIF-4100 / GIF-7001

## PREMIER EXAMEN PARTIEL A2013

## SOLUTION

### QUESTION 1)

A) $\tilde{\underline{x}}_a = \underline{l}_1 \times \underline{l}_\infty \Rightarrow \tilde{\underline{x}}_a^T = [2\ 0\ 0]$

B) $\tilde{\underline{x}}_b = \underline{l}_2 \times \underline{l}_\infty \Rightarrow \tilde{\underline{x}}_b^T = [2\ 0\ 0]$

C) $\tilde{\underline{x}}_c = \underline{l}_3 \times \underline{l}_\infty \Rightarrow \tilde{\underline{x}}_c^T = [0\ 2\ 0]$

D) $\tilde{\underline{x}}_d = \underline{l}_1 \times \underline{l}_3 \Rightarrow \tilde{\underline{x}}_d^T = [0\ \ -4\ \ +4]$

e) $\tilde{\underline{x}}_e = \underline{l}_2 \times \underline{l}_3 \Rightarrow \tilde{\underline{x}}_e^T = [0\ \ -10\ \ +4]$

f) $\tilde{\underline{x}}_f = \underline{l}_1 \times \underline{l}_2 \Rightarrow \tilde{\underline{x}}_f^T = [6\ 0\ 0]$

g) $\underline{x}_a^T = [2/0\ \ 0/0]$ à l'infini

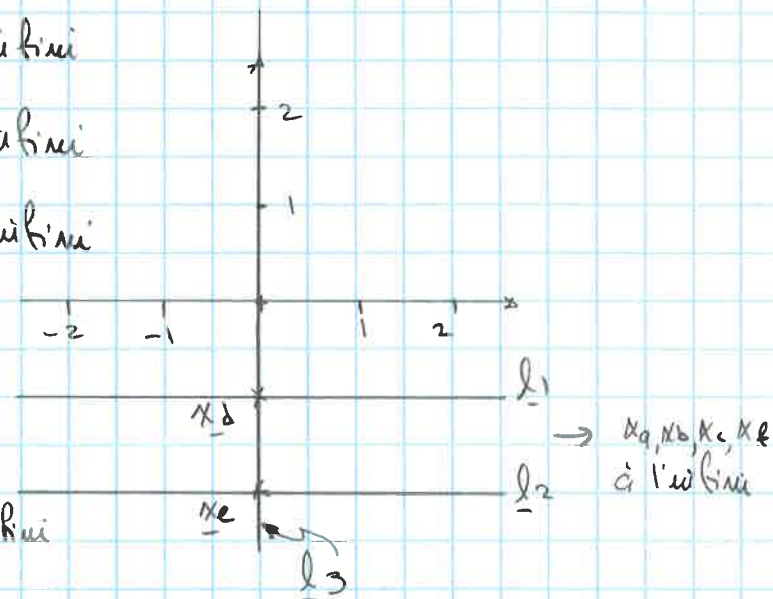
$\underline{x}_b^T = [2/0\ \ 0/0]$ à l'infini

$\underline{x}_c^T = [0/0\ \ 2/0]$ à l'infini

$\underline{x}_d^T = [0\ \ -1]$

$\underline{x}_e^T = [0\ \ 5/2]$

$\underline{x}_f^T = [6/0\ \ 0/0]$ à l'infini



QUESTION 2)

A)
$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\cos 15° = 0{,}97$ $\sin 15° = 0{,}26$

$$\Rightarrow \quad R_z(15°) = \begin{bmatrix} 0.97 & -0.26 & 0 & 0 \\ 0.26 & 0.97 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

B) rotation de 15° autour de z

axe de rotation $z \rightarrow \underline{n}_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$

$\sin(15°/2) = 0.13$ $\cos(15°/2) = 0.99$

$$\mathring{q}_{z} = \begin{bmatrix} \sin(15°/2)\, \underline{n}_z \\ \cos(15°/2) \end{bmatrix}$$

$$\mathring{q}_{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.13 \\ 0.99 \end{bmatrix}$$

C) rotation de 15° autour de x

axe de rotation $x \rightarrow \underline{n}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

$\sin(15°/2) = 0.13$ $\cos(15°/2) = 0.99$

$$\mathring{q}_{x} = \begin{bmatrix} \sin(15°/2)\, n_x \\ \cos(15°/2) \end{bmatrix}$$

$$\mathring{q}_{x} = \begin{bmatrix} 0.13 \\ 0 \\ 0 \\ 0.99 \end{bmatrix}$$

d) le point $p = [7 \;\; 12 \;\; 25]^T$ subit une rotation de 15° autour de z suivie d'une rotation de 15° autour de x

$$ {}^0q_x \; {}^0q_z \; {}^0v \; {}^0q_z^{-1} \; {}^0q_x^{-1} $$

ici

$$ {}^0v = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^0q_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.13 \\ 0.99 \end{bmatrix} \quad {}^0q_z^{-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.13 \\ 0.99 \end{bmatrix} $$

$$ {}^0q_x = \begin{bmatrix} 0.13 \\ 0 \\ 0 \\ 0.99 \end{bmatrix} \quad {}^0q_x^{-1} = \begin{bmatrix} -0.13 \\ 0 \\ 0 \\ 0.99 \end{bmatrix} $$

On a

$$ {}^0v \; {}^0q_z^{-1} = \begin{bmatrix} 5.37 \\ 12.79 \\ 24.75 \\ 3.25 \end{bmatrix} $$

et

$$ {}^0q_z \left( {}^0v \; {}^0q_z^{-1} \right) = \begin{bmatrix} 3.65 \\ 13.36 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix} $$ → la coordonnée z n'est pas modifiée par la rotation autour de z

$$ \left( {}^0q_z \; {}^0v \; {}^0q_z^{-1} \right) {}^0q_x^{-1} = \begin{bmatrix} 3.69 \\ 9.48 \\ 26.5 \\ 0.47 \end{bmatrix} $$

$$ {}^0q_x \left( \left( {}^0q_z \; {}^0v \; {}^0q_z^{-1} \right) {}^0q_x^{-1} \right) = \begin{bmatrix} 3.65 \\ 6.43 \\ 27.61 \\ 0 \end{bmatrix} $$ → la coordonnée x n'est pas modifiée par la rotation autour de x.

QUESTION 3)

A) $\underline{O} = [0 \ 0 \ 0]^T$

$\underline{P_i} = [0.2 \ 0 \ 0.2]^T$

$$\underline{P} = \underline{O} + \lambda \frac{\underline{P_i}}{\| \underline{P_i} - \underline{O} \|}$$

ici $\| \underline{P_i} - \underline{O} \| = \sqrt{\underline{P_i}^T \underline{P_i}} = 0.28$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 0.2 \end{bmatrix} \frac{1}{0.28} = \lambda \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 0.2 \end{bmatrix} \times 3.53$$

et $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 0.707 \\ 0 \\ 0.707 \end{bmatrix}$

B) pour le centre de projection on a $\underline{P_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

et $\lambda = 0$

c) pour le point image on a

$$\begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 0.2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 0.707 \\ 0 \\ 0.707 \end{bmatrix} \rightarrow 0.2 = 0.707\lambda \Rightarrow \lambda = 0.28$$

D) pour le point à 4 m selon z on a

$$4 = \lambda \times 0.707 \Rightarrow \lambda = 5.66$$

et donc $x = 5.66 \times 0.707 = 4$

QUESTION 4)

On trouve les coordonnées de $\underline{P}_w$ dans le repère global en calculant le point d'intersection des projecteurs dans le repère global :

$$\underline{P}_w = \begin{bmatrix} 1.5\text{ m} \\ 0 \\ 5\text{ m} \end{bmatrix}$$

Pour le sténopé 3, on a, en notant $\underline{P}_{c3}$ les coordonnées de $\underline{P}_w$ dans le repère 3

$$\tilde{\underline{P}}_w = \tilde{\underline{\underline{T}}}\, \tilde{\underline{\underline{R}}}_y(90°)\, \tilde{\underline{P}}_{c3}$$

$$\rightarrow \tilde{\underline{P}}_{c3} = \tilde{\underline{\underline{R}}}_y^{-1}\, \tilde{\underline{\underline{T}}}^{-1}\, \tilde{\underline{P}}_w$$

la matrice de projection de perspective $\tilde{\underline{\underline{P}}}$ est

$$\tilde{\underline{\underline{P}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

De plus $$\tilde{\underline{\underline{R}}}_y(90°) = \begin{bmatrix} \cos 90 & 0 & \sin 90 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin 90 & 0 & \cos 90 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

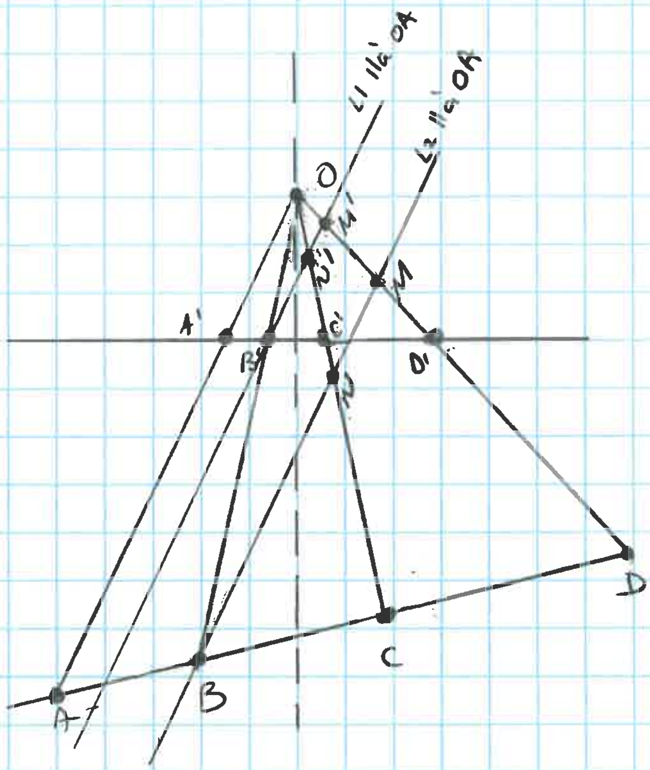
$$\rightarrow \tilde{\underline{\underline{R}}}_y^{-1} = \begin{bmatrix} \cos 90 & 0 & -\sin 90 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin 90 & 0 & \cos 90 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{\underline{\underline{T}}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

en faisant les produit de matrice on trouve

$$\tilde{\underline{p}}_{i3} = \tilde{\underline{\underline{P}}}\, \tilde{\underline{\underline{R}}}_y^{-1}\, \tilde{\underline{\underline{T}}}^{-1}\, \tilde{\underline{P}}_w = \begin{bmatrix} -0.07 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}^T$$

QUESTION 5)

On a avec la suggestion




par similitude des triangles OAC et NBC on a que

$$\frac{OA}{NB} = \frac{CA}{CB} \quad (1)$$

par similitude des triangles OA'C' et N'B'C' on a que

$$\frac{OA'}{N'B'} = \frac{C'A'}{C'B'} \quad (2)$$

par similitude des triangles OAD et MBD on a que

$$\frac{OA}{MB} = \frac{DA}{DB} \quad (3)$$

par similitude des triangles OA'D' et M'B'D' on a que

$$\frac{OA'}{M'B'} = \frac{D'A'}{D'B'} \quad (4)$$

de (1) et (3) on a que :

$$\frac{CA/CB}{DA/DB} = \frac{OA/NB}{OA/MB} \rightarrow \frac{CA/CB}{DA/DB} = \frac{MB}{NB} \quad (5)$$

de (2) et (4) on a que :

$$\frac{C'A'/C'B'}{D'A'/D'B'} = \frac{OA'/N'B'}{OA'/M'B'} \rightarrow \frac{C'A'/C'B'}{D'A'/D'B'} = \frac{M'B'}{N'B'} \quad (6)$$

On a aussi que, par homotéthie

$$\frac{M'B'}{MB} = \frac{N'B'}{NB} \rightarrow \frac{M'B'}{N'B'} = \frac{MB}{NB} \quad (7)$$

avec (5), (6) et (7) on trouve

$$\frac{CA/CB}{DA/DB} = \frac{C'A'/C'B'}{D'A'/D'B'}$$ et donc $(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$