

## INTRODUCTION À LA VISION NUMÉRIQUE

GiF-4100 / GiF 7001  
TRIMESTRE A2013  
SECOND EXAMEN PARTIE

## SOLUTION

## QUESTION 1)

A) On calcule

$$S^2 = [A_m - 0]^T [A_m - 0] \quad (1)$$

Si on minimise en solutionnant avec une approche de décomposition en valeurs singulières par exemple.

La minimisation de l'erreur algébrique ne vise qu'à trouver l'erreur minimale pour (1) sans tenir compte des problèmes "physiques".

B) On cherche d'abord une solution qui minimise l'erreur algébrique de (1). Ensuite on projette les points objets et on trouve les coordonnées des points-images avec la matrice trouvée à cet état. On utilise ensuite un algorithme d'optimisation non-linéaire pour affiner l'estimation de  $m$  minimisant l'erreur de reprojection.

C) La minimisation de l'erreur géométrique est préférable car elle tient compte des problèmes physiques du processus de formation d'image.

---

## Question 2)

A) L'homographie permet de faire passer les points image d'une première image sur le plan image d'une seconde image en résolvant un système d'équations linéaires surdeterminées

→ l'homographie doit être euclidienne par un plan, c'est-à-dire que les points objets/images dans les 2 images doivent se situer dans un plan.

B)

1) l'expérimentateur 2 est le meilleur car il disperse bien les points sur toute la surface utile des images

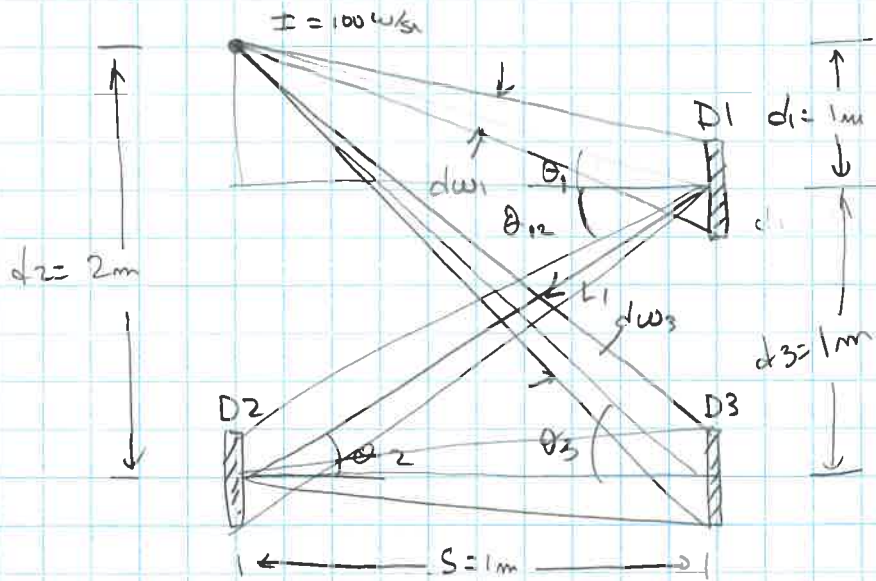
Exp 1: les points sont trop peu dispersés à la verticale

Exp 2: les points sont trop peu dispersés à l'horizontale

Exp 3: il y a des erreurs d'appariement

---

Question 3)



D1 reçoit un flux égal à :

$$d\Phi_1 = I d\omega_1 \quad (1)$$

où

$$d\omega_1 = \frac{A_{D1} \cos \theta_1}{(d_1^2 + S^2)} \quad (2)$$

avec

$$\cos \theta_1 = \frac{S}{\sqrt{d_1^2 + S^2}} \quad \text{et} \quad A_{D1} = \pi R_1^2 \quad (3)$$

donc

$$d\Phi_1 = \frac{I S \pi R_1^2}{\sqrt{d_1^2 + S^2} (d_1^2 + S^2)} \quad (4)$$

L'illuminance reçue par D1 de S est donc

$$dE_1 = \frac{d\Phi_1}{dA_1} \quad \text{ou} \quad dA_1 = \pi R_1^2$$

et, avec (4)

ona

$$dE_1 = \frac{I_s \pi R_1^2}{\sqrt{d_1^2 + s^2} (d_1^2 + s^2)} \times \frac{1}{\pi R_1^2}$$

$$dE_1 = \frac{I_s}{\sqrt{d_1^2 + s^2} (d_1^2 + s^2)} \quad (5)$$

Le disque D1 est Lambertien, la luminance émise avec D2 est donc, puisque la BRDF est  $\frac{1}{\pi}$ ,

$$L_1 = \rho dE_1 = \frac{1}{\pi} dE_1$$

et donc avec (5)

$$L_1 = \frac{1}{\pi} \times \frac{I_s}{\sqrt{d_1^2 + s^2} (d_1^2 + s^2)} \quad (6)$$

D2 reçoit un flux  $d\phi_2$  de D1 tel que

$$d\phi_2 = L_1 d\omega_2 A_1 \cos\theta_{12} \quad (7)$$

Ici

$$d\omega_2 = \frac{A_2 \cos\theta_2}{(s^2 + d_3^2)} \quad (8)$$

avec

$$\cos\theta_{12} = \frac{s}{\sqrt{s^2 + d_3^2}} \quad (9)$$

et

$$A_1 = \pi R_1^2, A_2 = \pi R_2^2 \text{ et } \cos\theta_{12} = \cos\theta_2 = \frac{s}{\sqrt{s^2 + d_3^2}} \quad (10)$$

En remplaçant (8), (9) et (10) dans (7), on a :

$$d\Phi_2 = \frac{\pi^2 s^2 R_1^2 R_2^2 L_1}{(s^2 + d_3^2)^2} \quad (11)$$

L'illuminance reçue par  $D_2$  est  $\frac{d\Phi_2}{dA_2}$  et donc, avec (11) et (10)

$$dE_2 = \frac{d\Phi_2}{dA_2} = \frac{1}{\pi R_2^2} \times \frac{\pi^2 s^2 R_1^2 R_2^2 L_1}{(s^2 + d_3^2)^2}$$

$$dE_2 = \frac{\pi s^2 R_1^2 L_1}{(s^2 + d_3^2)^2} \quad (12)$$

Comme  $D_2$  est Lambertien la luminance  $L_2$  émise vers  $D_3$  est donnée par

$$L_2 = \frac{1}{\pi} dE_2 \quad \text{et donc, avec (12)}$$

$$L_2 = \frac{1}{\pi} \frac{\pi s^2 R_1^2 L_1}{(s^2 + d_3^2)^2}$$

$$L_2 = \frac{s^2 R_1^2 L_1}{(s^2 + d_3^2)^2} \quad (13)$$

Le flux reçu de  $D_2$  par  $D_3$  est donné par

$$d\Phi_3 = L_2 d\omega_3 A_3 \quad (14)$$

Ici

$$A_3 = \pi R_3^2, \quad d\omega_3 = \frac{A_3}{s^2} = \frac{\pi R_3^2}{s^2} \quad (15)$$

(6)

Avec (14) et (15) on trouve

$$d\phi_3 = L_2 \frac{\pi R_3^2}{s^2} \quad (16)$$

De plus,  $\phi_3$  reçoit un flux de la source ponctuelle qui est donné par

$$d\phi_{3\text{-source}} = \Gamma d\omega_3 \quad (17)$$

avec

$$d\omega_3 = \frac{A_3 \cos\theta_3}{s^2 + d_2^2} \quad (18)$$

$$\text{ici } A_3 = \pi R_3^2 \text{ et } \cos\theta_3 = \frac{s}{\sqrt{s^2 + d_2^2}} \quad (19)$$

On peut donc écrire (17)

$$d\phi_{3\text{-source}} = \frac{\pi R_3^2 s}{(s^2 + d_2^2)\sqrt{s^2 + d_2^2}} \Gamma \quad (20)$$

Le flux total reçu par  $\phi_3$  est tiré de (16) et (20)

$$d\phi_{3\text{tot}} = d\phi_3 + d\phi_{3\text{-source}}$$

$$d\phi_{3\text{tot}} = L_2 \frac{\pi R_3^2}{s^2} + \frac{\pi R_3^2 s \Gamma}{(s^2 + d_2^2)\sqrt{s^2 + d_2^2}} \quad (21)$$

et l'illuminance totale est  $\frac{d\phi_{3\text{tot}}}{dA_3}$

$$dE_3 = \frac{L_2 \pi R_3^2}{s^2 \pi R_3^2} + \frac{\pi R_3^2 s \Gamma}{\pi R_3^2 (s^2 + d_2^2)\sqrt{s^2 + d_2^2}}$$

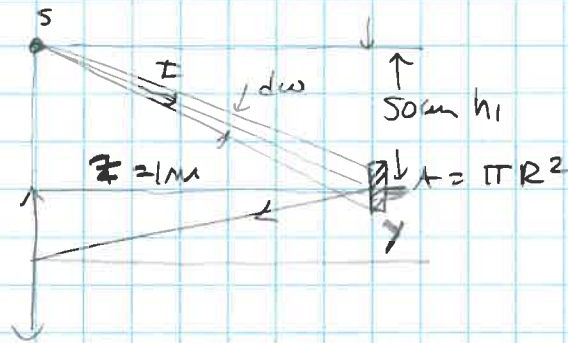
(7)

$$dE_3 = \frac{L_2}{s^2} + \frac{s}{(s^2 + d_2^2) \sqrt{s^2 + d_2^2}} \quad (22)$$

On peut faire le calcul avec (a) (13) et (22)

---

## Question 4)



On a que le flux reçu de la source par le disque est

$$d\Phi = I dw \quad (1)$$

avec

$$dw = \frac{dA \cos \theta}{z^2 + h^2} = \frac{\pi R^2}{z^2 + h^2} \frac{d}{\sqrt{z^2 + h^2}} \quad (2)$$

et donc

$$d\Phi = I \frac{\pi R^2 d}{\sqrt{z^2 + h^2} (z^2 + h^2)} \quad (3)$$

et l'illuminance sur le disque est

$$dE_{\text{disque}} = \frac{d\Phi}{dA} = \frac{I \pi R^2 d}{\sqrt{z^2 + h^2} (z^2 + h^2)} \times \frac{1}{\pi R^2}$$

$$dE_{\text{disque}} = \frac{d}{\sqrt{z^2 + h^2} (z^2 + h^2)} I \quad (4)$$

La luminance du disque en direction de la caméra est

$$L = dE_{\text{disque}} \times \frac{1}{\pi} \quad (5)$$



et, avec l'équation fondamentale de formation des images on trouve

$$dE_{\text{image}} = \frac{\pi}{4} \left[ \frac{d}{F} \right]^2 \cos^4(\alpha) L$$

ici,  $L$  est donné par (5) et (4)

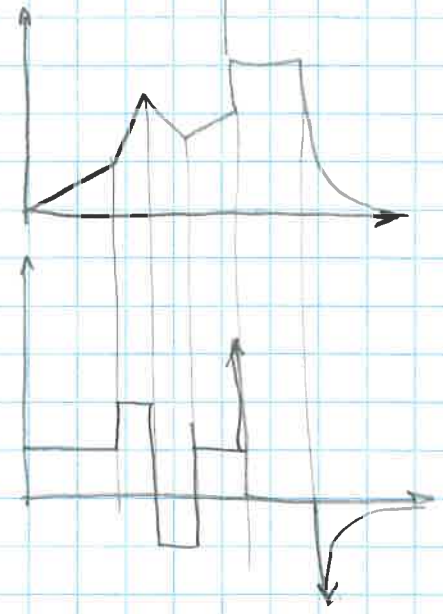
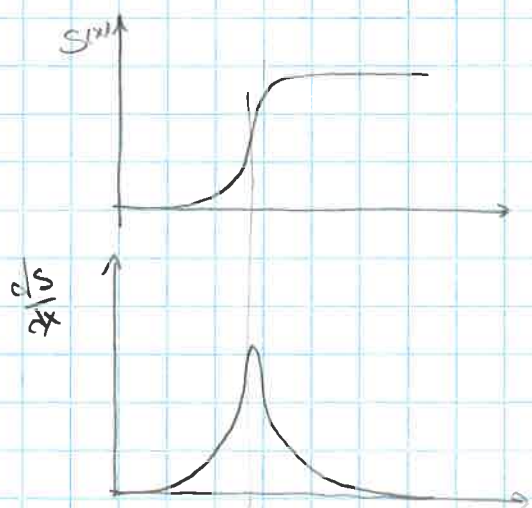
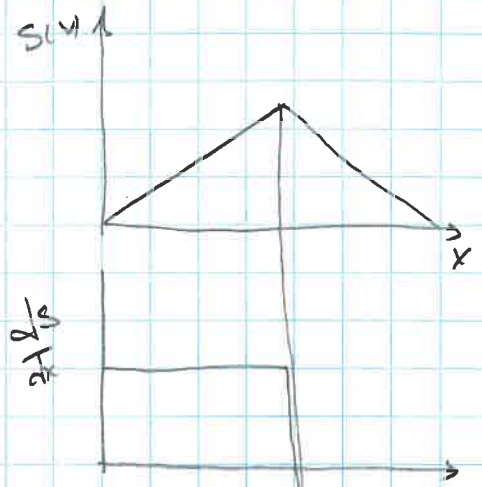
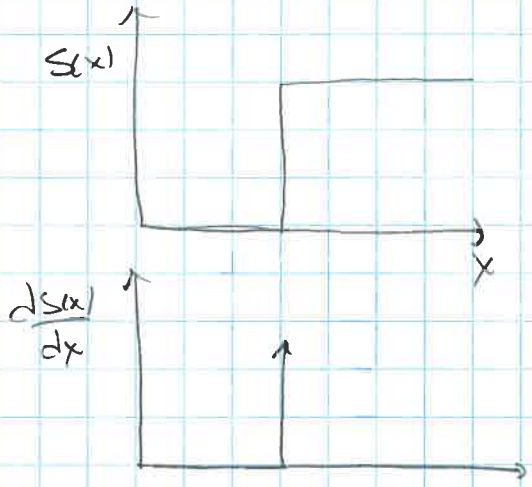
$$\cos \alpha = \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}$$

Question 5)

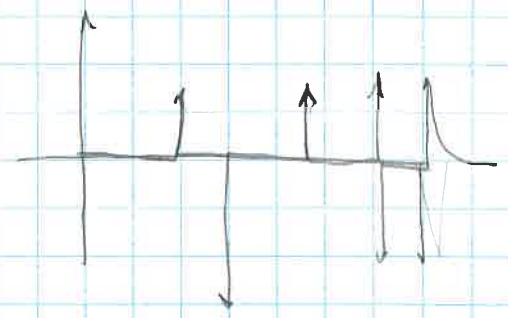
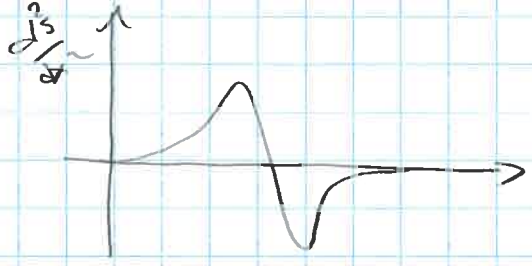
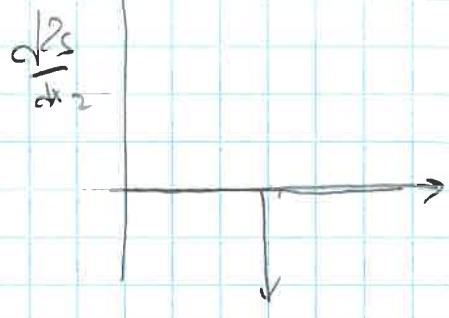
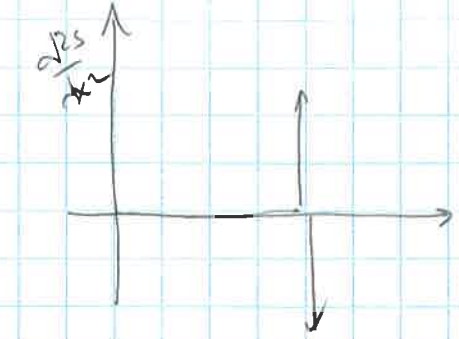
- A)  $\underline{X} = \underline{R} - \underline{\mu} \underline{e}^T$  représente les données de  $\underline{R}$  centrées sur la moyenne des lignes de  $\underline{R}$ .
- B) Oui les colonnes de  $\underline{W}$  sont des "eigen-images".
- C) L'écart-type des données de  $\underline{R}$  centrées.
- D)  $\underline{Z}$  représente de combien d'écart-types les données de  $\underline{X}$  s'écartent de la moyenne.
- E)  $\underline{Y}$  représente la représentation des images de  $\underline{R}$  dans un espace de dimensions plus faibles, celui des composantes principales de la base de données d'images.
-

# Question 6)

6A)



6) b)



6) c)

