

# **Introduction à la vision numérique**

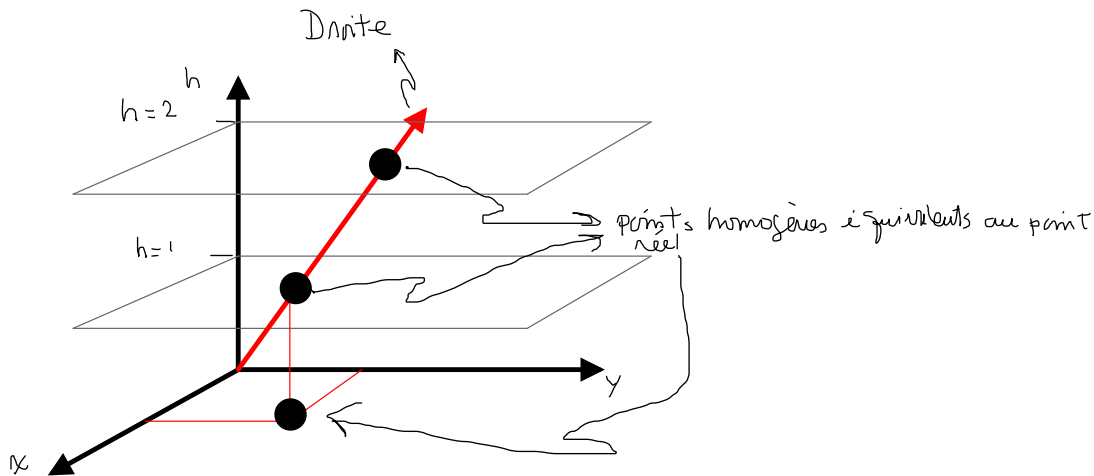
**GIF-4100**

**GIF-7001**

## **Rappels mathématiques**

**Notes vues au cours**

# Coordonnées homogènes



En coordonnées homogènes les coordonnées du point  $[x, y]^T$  s'expriment comme  $[hx, hy, h]^T$  où  $h \neq 0$ . Nous verrons plus tard le cas où  $h = 0$  (points à l' $\infty$ ). Pour trouver les coordonnées d'un point en coordonnées réelles, il faut simplement diviser les deux premières coordonnées par la troisième  $\rightarrow [hx_h, hy_h]^T \rightarrow [x, y]^T$ .

Les coordonnées homogènes permettent de travailler dans un espace 3D qui linéarise les opérations dans un espace 2D. On retrouve l'espace 2D en projetant l'espace 3D sur l'espace 2D.

Nous verrons l'utilité de cette approche lors que nous traiterons la **projection de perspective** lors de la formation des images. Imaginons qu'une image est la projection d'un monde 3D sur un plan 2D (le plan image sur lequel se trouvent les **pixels**).

Dans ce qui suit, nous adoptons la notation suivante :

- |                         |   |
|-------------------------|---|
| $\underline{n}$         | : vecteur en coordonnées <b>réelles</b>   |
| $\underline{\tilde{n}}$ | : vecteur en coordonnées <b>homogènes</b> |
| $\underline{M}$         | : matrice en coordonnées <b>réelles</b>   |
| $\underline{\tilde{M}}$ | : matrice en coordonnées <b>homogènes</b> |

# Transformations de coordonnées et changements de repères

Abordons d'abord le cas en deux dimensions parce qu'il est plus facile à visualiser.

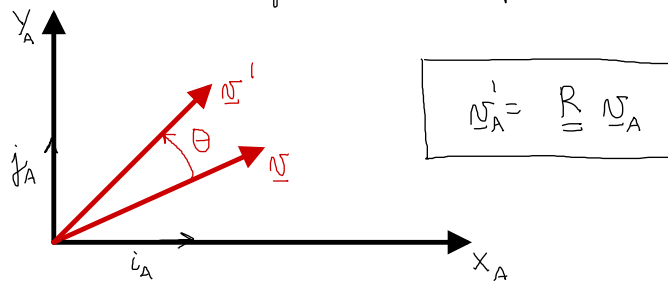
## A- ROTATION PURE

En deux dimensions, la matrice suivante :

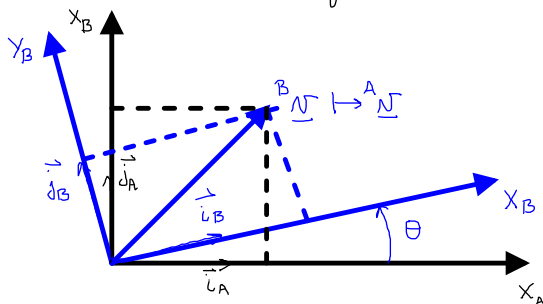
$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

peut être interprétée de deux manières équivalentes :

1- **Rotation** d'un vecteur  $\underline{N}$  d'un angle  $\theta$  dans un repère :



2- **Changement de repère** dans lequel un vecteur est représenté (par ses coordonnées)



$${}^A \underline{N} = {}^A_B R \underline{N} = \begin{bmatrix} \vec{i}_B \cdot \vec{i}_A & \vec{j}_B \cdot \vec{i}_A \\ \vec{i}_B \cdot \vec{j}_A & \vec{j}_B \cdot \vec{j}_A \end{bmatrix} {}^B \underline{N}$$

On observe que  ${}^A_B R$  est construite en cherchant les composantes de  $\vec{i}_B$  et  $\vec{j}_B$  dans le repère A

Chaque vecteur de base correspond à une colonne

En coordonnées homogènes, on écrit alors l'écriture de changement de repères pour le cas 2D de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}^A \\ \tilde{y}^A \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}^B \\ \tilde{y}^B \\ 1 \end{bmatrix}$$

et le résultat de la transformation donne:

$$\begin{aligned} \tilde{x}^A &= \cos\theta \tilde{x}^B - \sin\theta \tilde{y}^B \\ \tilde{y}^A &= \sin\theta \tilde{x}^B + \cos\theta \tilde{y}^B \\ h &= 1 \end{aligned}$$

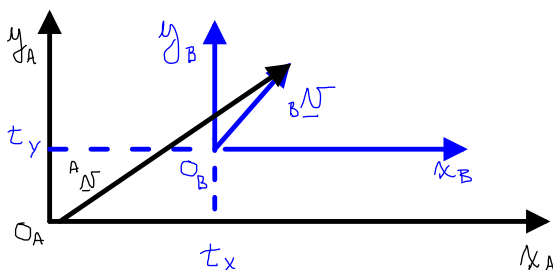
et, en coordonnées réelles (i.e. non-homogènes):

$$x^A/h = \cos\theta x^B - \sin\theta y^B$$

$$y^A/h = \sin\theta x^B + \cos\theta y^B$$

## B-TRANSLATION

D'après la figure ci-dessous



La matrice  $\tilde{B}^A$  en coordonnées homogènes telle que:

$$\tilde{B}^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

permet de transformer un vecteur  $\tilde{N}^B$ , exprimé dans le repère  $O_B$ , en  $\tilde{N}^A$ , exprimé dans le repère  $O_A$ . Ainsi, on peut écrire:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}^A \\ \tilde{y}^A \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}^B \\ \tilde{y}^B \\ 1 \end{bmatrix}$$

et donc:

$$\begin{aligned} \tilde{x}^A &= \tilde{x}^B + t_x \\ \tilde{y}^A &= \tilde{y}^B + t_y \\ h &= 1 \end{aligned}$$

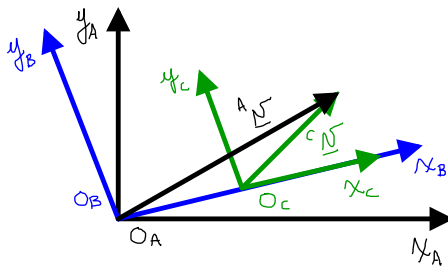
Ce qui donne en coordonnées réelles :

$$\begin{aligned} {}^A \tilde{x}/h &= {}^A x = {}^B x + t_x \\ {}^A \tilde{y}/h &= {}^A y = {}^B y + t_y \end{aligned}$$

### C- TRANSFORMATIONS COMPOSÉES

On peut construire des transformations de coordonnées en **post-multipliant** les changements de repère.

Par exemple, on peut chercher l'expression des coordonnées d'un vecteur par rapport à des repères ayant subi plusieurs transformations. Par exemple, d'après la figure ci-dessous :



$${}^A \tilde{N} = {}^A \tilde{R}(\theta) {}^B \tilde{T} {}^C \tilde{N}$$

post-multiplication des matrices de changement de repère.

### D- Généralisation - Rotations et translations

En 3D, les rotations autour de chaque axe d'un repère cartésien en coordonnées homogènes

sont :

$$\begin{aligned} \tilde{R}_z(\theta) &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \tilde{R}_x(\gamma) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \tilde{R}_y(\beta) &= \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Remarque : la colonne avec un 1 correspond à l'axe de rotation.

Les translations sont données par la matrice suivante en coordonnées homogènes :

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## E- Propriétés des matrices de rotation

1-  $\underline{\underline{R}}^{-1} = \underline{\underline{R}}^T$  (une matrice de rotation est orthogonale).

2-  $\text{Det}(\underline{\underline{R}}) = 1$

3- Les colonnes de  $\underline{\underline{R}}$  forment un système orthonormal

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} i_c \\ \downarrow \\ i_c \rightarrow \end{array} & \begin{array}{c} j_c \\ \downarrow \\ j_c \rightarrow \end{array} & \begin{array}{c} k_c \\ \downarrow \\ k_c \rightarrow \end{array} \\
 \begin{array}{c} i_c \cdot i_c = j_c \cdot j_c = k_c \cdot k_c = 1 \\ i_c \cdot j_c = i_c \cdot k_c = j_c \cdot k_c = 0 \end{array} & \begin{array}{c} i_c \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & \Omega_{32} & \Omega_{33} \end{array} \right. \\ j_c \rightarrow \\ k_c \rightarrow \end{array} & \begin{array}{l} i_c \cdot i_c = j_c \cdot j_c = k_c \cdot k_c = 1 \\ i_c \cdot j_c = i_c \cdot k_c = j_c \cdot k_c = 0 \end{array}
 \end{array}$$

4- Les valeurs propres de  $\underline{\underline{R}}$  sont :  $1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}$

l'axe de rotation est le vecteur propre  $\underline{n}$  associé à la valeur propre 1

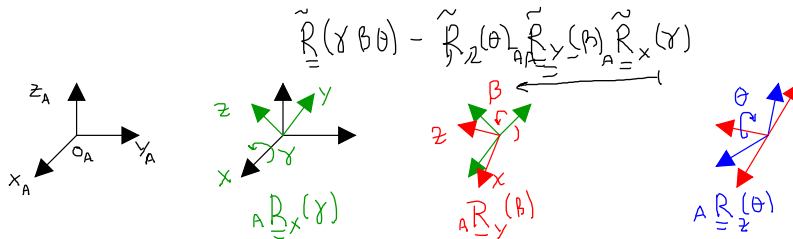
$$\underline{\underline{R}} \underline{n} = \lambda \underline{n} = 1 \underline{n} = \underline{n}$$

5- Une matrice de rotation possède 9 paramètres (les  $\Omega_{ij}$ ) et 6 contraintes (3 contraintes de module unitaire des colonnes et 3 contraintes d'orthogonalité entre les colonnes). Une matrice de rotation possède donc **3 degrés de liberté**.

## F- Différentes Conventions de représentation des rotations

Une matrice de rotation générale possédant 3 degrés de liberté, plusieurs conventions différentes ont été proposées pour composer cette matrice générale à partir des 3 matrices données au paragraphe D.

1- Convention "Roll, Pitch, Yaw" (Roulis, tangage, lacet)



les rotations sont toutes effectuées dans le repère A et sont lues de droite à gauche (pré-multiplication)

## 2- Angles d'Euler (convention zyx)

$$R_{\text{tot}} = \underbrace{R_x(\alpha) R_y(\beta) R_z(\theta)}_{\text{Pré-multiplication}}$$

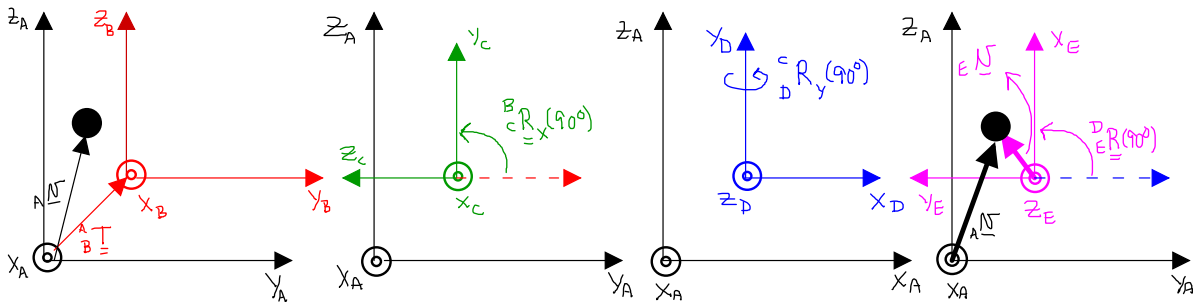
3- On peut aussi voir les rotations composées comme des "post-multiplications". Ceci signifie que chaque nouvelle rotation est effectuée dans le repère précédent. On peut aussi ajouter les translations pour généraliser. Par exemple, on peut effectuer une translation d'un repère par rapport à un autre puis effectuer ensuite des rotations successives, chaque rotation étant faite par rapport au repère précédent. Les "post-multiplications" se "lisent" de gauche à droite. Voyons un exemple concret. Cet exemple sera utile lorsque nous verrons le modèle de caméra de type "stéréopé" et le calibrage des caméras.

Convention:  $\odot$  Axe de coordonnées sortant de la feuille

$\otimes$  Axe de coordonnées entrant dans la feuille

Illustrons la transformation de repères composée suivante :

$${}^A \tilde{T}(0, t_y, t_z) {}^B R_x(90^\circ) {}^C R_y(90^\circ) {}^D R_z(90^\circ)$$



On peut donc écrire l'expression qui permet de calculer les coordonnées de  ${}^A \tilde{N}$  à partir de celles de  ${}^E \tilde{N}$

$${}^A \tilde{N} = {}^A \tilde{T}(0, t_y, t_z) {}^B \tilde{R}_x(90^\circ) {}^C \tilde{R}_y(90^\circ) {}^D \tilde{R}_z(90^\circ) {}^E \tilde{N}$$

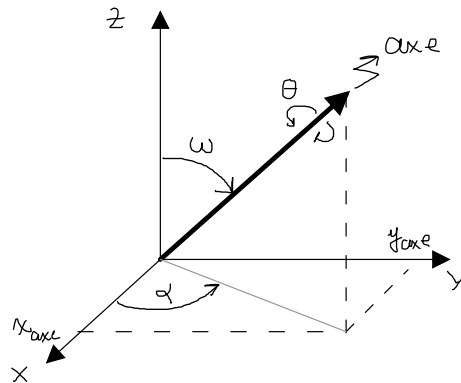
Pour trouver  ${}^E\tilde{N}$  à partir de  ${}^A\tilde{N}$ , il faut inverser l'expression précédente:

$${}^E\tilde{N} = \begin{matrix} D \\ E \end{matrix} \tilde{R}_z^{-1} \begin{matrix} C \\ D \end{matrix} \tilde{R}_y^{-1} \begin{matrix} B \\ C \end{matrix} \tilde{R}_x^{-1} \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \tilde{T}^{-1} \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \tilde{N}$$

## G - Représentation par axe et angle

Toute rotation composée peut être exprimée par un **axe** et un **angle**.

Ceci est compatible avec le fait qu'une rotation possède de **3 degrés de liberté**. Car il faut **2 angles** pour **orienter** l'axe de rotation dans un repère de coordonnées, et un **angle** pour exprimer l'amplitude de la rotation.



- Orientation de l'axe ( $\alpha, \omega$ )
- Rotation:  $\theta$  autour de l'axe

Si le vecteur supportant l'axe de rotation est **unitaire**, les composantes  $(n_{axe}, y_{axe})$  peuvent aussi être utilisées pour donner l'orientation de l'axe (au lieu de  $(\alpha, \omega)$ ) car  $n_{axe}^2 + y_{axe}^2 + z_{axe}^2 = 1$

La matrice de rotation  $R$  peut être obtenue des composantes de l'axe et de l'angle de rotation avec l'expression suivante:

$$R = \mathbb{I}_3 + (1 - \cos \theta) \begin{bmatrix} n_x^2 & n_x n_y & n_x n_z \\ n_y n_x & n_y^2 & n_y n_z \\ n_z n_x & n_z n_y & n_z^2 \end{bmatrix} + \sin \theta \begin{bmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{bmatrix}$$

( $\mathbb{I}_3$ : matrice identité 3x3)

## H - Transformation rigide

De manière plus générale, une **transformation rigide** implique une **rotation** autour d'un axe et une **translation** le long de cet axe. Cela est équivalent aux produits de matrices discutés au paragraphe F-3.



On peut aussi regarder ça à nouveau avec les matrices de translation et de rotation. On a vu que :

$${}^A \tilde{N} = {}^A \tilde{T} {}^B \tilde{R} {}^c \tilde{N}$$

ici

$${}^A \tilde{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad {}^B \tilde{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donc

$${}^A \tilde{N} = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & \underline{t} \\ \underline{0}_{3 \times 1} & 1 \end{bmatrix} {}^c \tilde{N} \quad \text{où} \quad \underline{t} = [t_x \ t_y \ t_z]^T \quad \text{Transformation rigide}$$

qu'on peut écrire en coordonnées réelles

$${}^A \underline{N} = R {}^c \underline{N} + \underline{t}$$

Il en résulte que :

$${}^c \underline{N} = R^{-1} {}^A \underline{N} - R^{-1} \underline{t} = R^T {}^A \underline{N} - R^T \underline{t}$$

et, en coordonnées homogènes :

$${}^c \tilde{N} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T \underline{t} \\ \underline{0}_{3 \times 1} & 1 \end{bmatrix} {}^A \tilde{N} \quad \text{Transformation rigide inverse}$$

**Important :** une transformation rigide préserve les distances (longueurs) et les angles

## I- Changement de repère d'un plan

Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, l'équation de changement de repère s'écrit :

$${}^A \underline{N} = {}^A R {}^B \underline{N} + \underline{t}$$

L'équation d'un **plan** dans le repère **B** s'écrit :

$$\underline{n}^T \underline{B} \underline{x} + d = 0$$

et, dans le repère **A**, cette équation du plan s'écrit :

$$\underline{n}'^T \underline{A} \underline{x} + d' = 0$$

$$\underline{n}'^T \left[ \underline{B}^A \underline{R} \underline{B} \underline{x} + \underline{t} \right] + d' = 0$$

$$\underline{n}'^T \underline{B}^A \underline{R} \underline{x} + \underline{n}'^T \underline{t} + d' = 0$$

donc  $\underline{n}'^T \underline{B}^A \underline{R} = \underline{n}^T \rightarrow \underline{B}^A \underline{R}^T \underline{n}' = \underline{n} \mapsto \underline{n}' = \underline{B}^A \underline{R} \underline{n}$

et  $\underline{n}'^T \underline{t} + d' = d \mapsto d' = d - \underline{n}'^T \underline{t} \mapsto d' = d - \underline{n}^T \underline{B}^A \underline{R}^T \underline{t}$

**Changement de repère d'un plan**

$$\underline{n}' = \underline{B}^A \underline{R} \underline{n}, \quad d' = d - \underline{n}^T \underline{B}^A \underline{R}^T \underline{t}$$

## J- Mise à l'échelle

La mise à l'échelle est une transformation de **similitude**. La matrice de mise à l'échelle en coordonnées homogènes est :

$$M = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## K- transformation affine

Une transformation **affine** est une transformation géométrique qui ne préserve ni les longueurs ni les angles

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{N}' = \tilde{A} \underline{N}$$

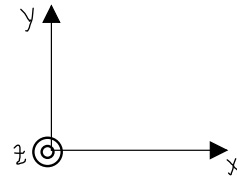
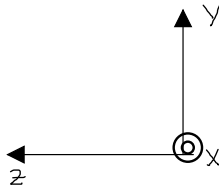
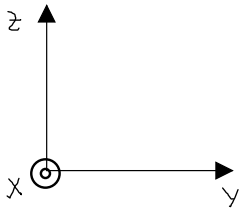
→ dernière ligne avec des 0 et un 1 au pivot de facteur d'échelle

## L- Transformations composées

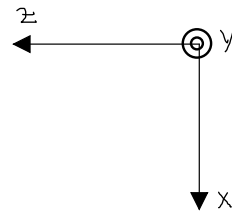
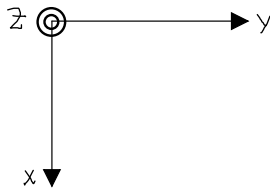
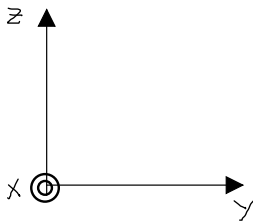
Comme nous l'avons vu précédemment, il est possible de composer des transformations en multipliant les matrices de transformation.

$$\tilde{N} = \underbrace{\begin{matrix} \tilde{A} & \tilde{B} & \tilde{C} \\ \tilde{S} & \tilde{T} & \tilde{R}_x \\ \tilde{D} & \tilde{R}_z & \tilde{N} \end{matrix}}_{\tilde{T}_{\text{composé}}}$$

Le produit de matrices n'étant **pas commutatif**, l'ordre dans lequel les transformations sont effectuées est **important**.



$$\begin{matrix} \underline{R}_x(90^\circ) & \underline{R}_y(90^\circ) \\ \longleftarrow & \longrightarrow \end{matrix}$$



$$\begin{matrix} \underline{R}_y(90^\circ) & \underline{R}_x(90^\circ) \\ \longleftarrow & \longrightarrow \end{matrix}$$

## M- Transformation projective

$$\underline{\tilde{N}'} = \underline{\tilde{B}} \underline{N} \text{ avec } \underline{\tilde{B}} \text{ quelconque}$$

Cas particulier utile en vision pour la formation des images: transformation projective  $3D \rightarrow 2D$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ s \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix}}_{\underline{\tilde{M}}_{3 \times 4}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{3 \times 3} & \underline{b}_{3 \times 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si  $|\underline{A}| \neq 0$ ,  $\underline{\tilde{M}}$  est une matrice de **projection de perspective**. Ce type de matrice décrit le processus de formation d'une image qui, sur le plan **géométrique**, n'est rien d'autre que la projection de points d'un repère 3D sur un **plan** (le **plan image**). Nous verrons ces principes plus tard dans le cours.

---

## N- Quaternions

Les **quaternions** sont des éléments d'un **espace vectoriel** sur lequel est définie la **multiplication**. Dans ce qui suit, un quaternion sera noté  $\underline{q}$  pour le distinguer d'un vecteur  $\underline{q}$  par exemple.

Un **quaternion** peut être interprété de plusieurs façons :

1- Comme un **vecteur à quatre composantes** :

$$\underline{q} = [x \ y \ z \ w]^T$$

2- Comme un élément formé d'un **vecteur** et d'un scalaire :

$$\dot{\underline{q}} = \begin{bmatrix} \underline{v} \\ w \end{bmatrix} \quad \text{avec } \underline{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

3- Comme un **nombre complexe** très complexe ayant 3 parties imaginaires

$$\dot{\underline{q}} = w + ai + bj + ck$$

$$\text{avec } i = j = k = \sqrt{-1}$$

4- Comme la **Somme** d'une partie **scalaire** avec une partie **vectorielle** :

$$\dot{\underline{q}} = \underline{r} + \underline{v}$$

Quelle que soit l'interprétation retenue pour leur application à des problèmes concrets, on définit la **multiplication** de **quaternions** comme suit :

$$\text{Si } \dot{\underline{q}}_1 = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ w_1 \end{bmatrix} \quad \text{et } \dot{\underline{q}}_2 = \begin{bmatrix} \underline{v}_2 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\underline{q}}_3 = \dot{\underline{q}}_1 \dot{\underline{q}}_2 = \begin{bmatrix} \underline{v}_3 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

avec

$$\underline{v}_3 = w_1 \underline{v}_2 + w_2 \underline{v}_1 + \underline{v}_1 \times \underline{v}_2$$

$$w_3 = w_1 w_2 - \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2$$

On peut vérifier que la multiplication est **associative** mais **non commutative**.

On peut aussi définir le **produit scalaire** entre deux quaternions  $\dot{\underline{p}} = \begin{bmatrix} \underline{p} \\ p \end{bmatrix}$  et  $\dot{\underline{q}} = \begin{bmatrix} \underline{q} \\ q \end{bmatrix}$

$$\dot{\underline{p}} \cdot \dot{\underline{q}} = p q + \underline{p} \cdot \underline{q}$$

La **norme** d'un quaternion  $\dot{\underline{q}}$  est donnée par :

$$\|\dot{\underline{q}}\| = \dot{\underline{q}} \cdot \dot{\underline{q}} = q \underline{q} + \underline{q} \cdot \underline{q}$$

Un **quaternion unitaire** a une norme  $\|q\| = 1$

Le **Conjugué** (inverse) d'un quaternion s'obtient en changeant le **signe** de la partie vectorielle ou de la partie scalaire, mais **pas les deux** :

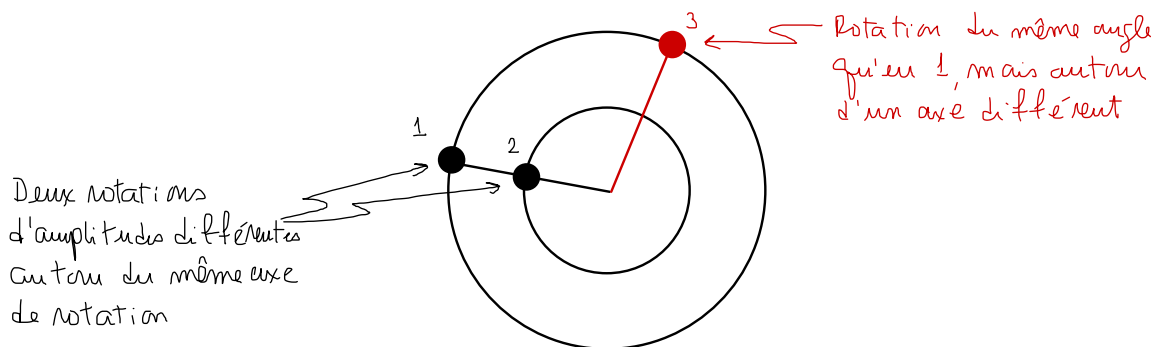
$$q^{-1} = q^* = \begin{bmatrix} -a \\ -b \\ -c \\ d \end{bmatrix}$$

Ces concepts et définitions étant donnés, voyons maintenant comment les quaternions peuvent nous être utiles pour représenter les **rotations**.

## Hypersphère des rotations

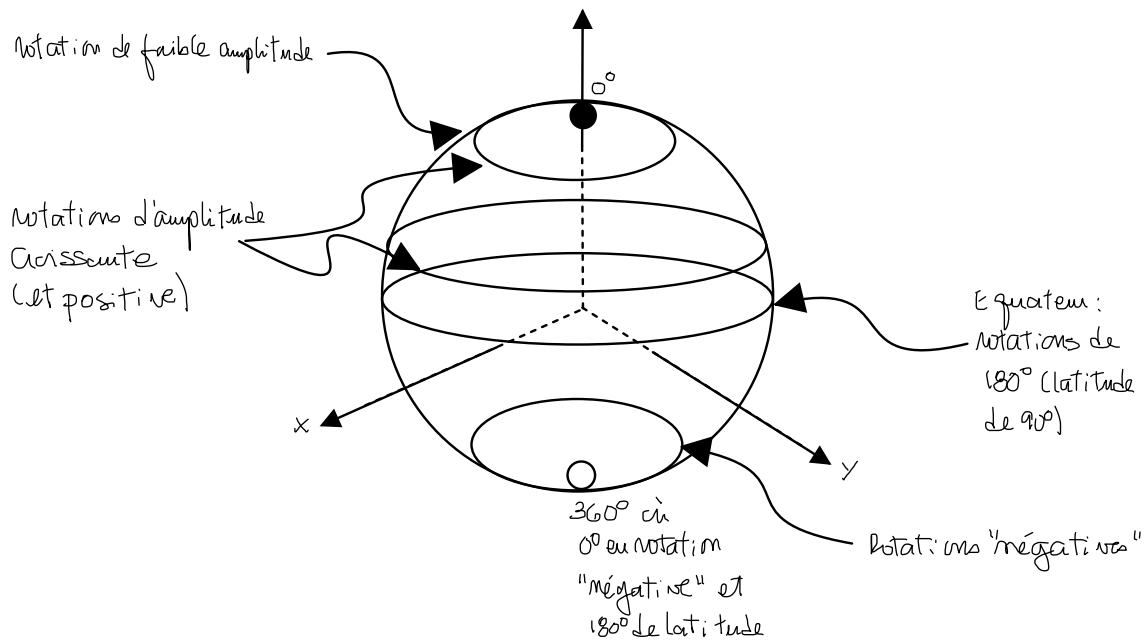
Les **quaternions unitaires** représentent l'**espace mathématique** des **rotations** dans l'espace à 3 dimensions. On peut comprendre cette correspondance entre rotations et quaternions unitaires en visualisant l'**espace des rotations**.

Commençons d'abord par un exemple simple. Toute rotation en 3D peut être décrite par une rotation d'un certain **angle** effectuée autour d'un **axe**. Prenons le **cas spécial** d'une rotation effectuée autour d'un **axe situé dans le plan xy**. On peut spécifier l'axe d'une des rotations possibles par un **point** sur un **cercle** et l'**amplitude** de la rotation par le **rayon** du cercle.



Une autre façon de voir les choses est qu'une rotation autour d'un axe de

rotation situé dans le plan  $xy$  peut être décrite par un **point** situé à la surface d'une **sphère** de **rayon constant**. En commençant au pôle nord d'une sphère dans l'espace à 3 dimensions et en spécifiant que le pôle est la **rotation identité** (i.e. angle de rotation nul). Une **petite rotation** (angle de rotation petit) peut être représentée comme une coupe de la sphère parallèle au plan  $xy$  et très près du pôle nord (voir figure).



Certaines caractéristiques des rotations et leurs représentations associées peuvent être comprises grâce à cette visualisation:

- 1- l'espace des rotations est **continu**
- 2- une **même rotation** peut être représentée par **deux points antipodaux** sur la sphère. Ces points sont aux extrémités de la droite passant par le centre de la sphère. Ceci explique le fait qu'une rotation peut être représentée comme une **rotation autour d'un axe** ou comme une **rotation négative** autour d'un axe pointant dans la **direction opposée**.
- 3- La "**latitude**" d'un cercle représentant une rotation d'un certain angle est la **moitié** de la valeur de l'angle représenté par cette rotation car la latitude s'étend de  $0^\circ$  à  $180^\circ$  alors que les rotations s'étendent par leur part de  $0^\circ$  à  $360^\circ$ .
- 4- la "**longitude**" d'un point sur la sphère représente un axe de rotation donné situé dans le plan  $xy$ .

Cette visualisation peut être étendue aux rotations générales en 3D (et non limitées à des axes de rotation situés dans le plan  $x-y$ ). Dans ce cas :

- 1- Un **point** représente une **rotation nulle** (dans ce cas, l'axe de rotation n'est pas défini);
- 2- Une rotation d'une **petite valeur d'angle** autour d'un **axe donné** est représentée par un **point** sur une sphère (axe) de **faible rayon**. Plus le rayon de la sphère croît, plus l'angle de rotation augmente. Cette croissance du rayon se poursuit jusqu'à ce que l'angle de rotation de  $180^\circ$  soit atteint. Le rayon de la sphère se met alors à **décroître** jusqu'à ce que le rayon de la sphère soit **nul**, ce qui correspond à une rotation de  $360^\circ$  (ou  $0^\circ$  à partir du sens de rotation négatif).

Cet **ensemble de sphères** qui se dilate et se contracte représente une **hypersphère** dans l'espace **4-D** (on dit que c'est une 3-sphère)

- 3- Chaque rotation représentée par un point sur l'hypersphère (point sur la sphère 3D + rayon) à son **équivalent antipodal** sur l'hypersphère.
- 4- La **"latitude"** sur l'hypersphère est la demie de la valeur de l'angle de rotation.

Le comportement d'un **point sur une hypersphère générale** (i.e. un **quaternion** représentant un point dans un espace 4D) se retrouve chez les **quaternions unitaires**. En effet, un **quaternion général** représenté par un point dans un espace à 4 dimensions, mais le **contrainte** à avoir une **norme unitaire** ( $\|q\|=1$ ) conduit à un **espace à 3 dimensions** équivalent à la **surface d'une hypersphère**.

Le **quaternion unitaire** a une norme de 1, ce qui correspond à une **hypersphère** de **rayon = 1**. La **partie vectorielle** du **quaternion unitaire** représente le **rayon** d'une **sphère** en 3 dimensions ("2-sphère") correspondant à l'**axe de rotation** et son **module** est le **sinus** de la **moitié** de l'**angle de rotation**.

La **même rotation** peut être représentée par **deux quaternions unitaires** de **signes opposés**.



Maintenant que nous avons vu que l'espace des rotations dans l'espace 3D peut être représenté par les quaternions unitaires situés sur la **surface** d'une **hypersphère** de **rayon unitaire**, voyons comment l'espace des rotations peut être **paramétrisé** sur la **surface de l'hypersphère unitaire**.

Pour illustrer la démarche menant à la meilleure paramétrisation, revenons au cas d'une rotation autour d'un axe résidant dans le plan  $x-y$ .

→ Nous savons qu'il est possible de paramétriser la surface (en 2 dimensions) d'une sphère (en 3 dimensions) avec seulement **2 paramètres**, soit la **latitude** et la **longitude**. Or, cette représentation est **dégénérée** aux pôles (Nord et Sud) car alors, la **longitude** perd tout son sens. Pourtant, d'un point de vue géométrique, rien ne distingue les pôles des autres points à la surface de la sphère.

Il peut être démontré **qu'aucune paramétrisation à 2 paramètres** ne permet d'éviter cette dégénérescence aux pôles.

La dégénérescence peut être évitée en insérant la surface de la sphère dans un **espace à 3 dimensions** et en la paramétrisant grâce à **3 coordonnées cartésiennes**  $(w, x, y)$  et en adoptant la stratégie suivante :

- 1- le pôle **Nord** est situé à  $(w, x, y) = (1, 0, 0)$ ;
- 2- le pôle **Sud** est situé à  $(w, x, y) = (-1, 0, 0)$ ;
- 3- l'**équateur** est situé à  $w = 0$  et  $x^2 + y^2 = 1$ ;
- 4- les points sur la sphère satisfont  $w^2 + x^2 + y^2 = 1$ ,  
ce qui fait qu'on a **3 paramètres**  $(w, x, y)$ , mais seulement **2 degrés de liberté** car un paramètre peut être calculé à partir des deux autres;
- 5- Un point  $(w, x, y)$  représente une **rotation** dans l'espace ordinaire autour d'un axe horizontal orienté par le vecteur  $(x, y, 0)$ . La rotation est d'un angle :

$$\theta = 2 \arccos w = 2 \arcsin \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{w = \frac{\cos \theta}{2}}$$

Le même raisonnement peut s'étendre à la paramétrisation de la surface

d'une **hypersphère unitaire**. Une rotation peut s'exprimer par 3 angles d'Euler, mais cette paramétrisation est soumise au problème de "gimbal lock". Ce problème peut être évité grâce à une **paramétrisation à 4 paramètres**  $(w, x, y, z)$  soumis à la contrainte  $w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

Le point  $(w, x, y, z)$  représente une rotation autour de l'axe orienté selon le **vecteur**  $(x, y, z)$ , d'un angle

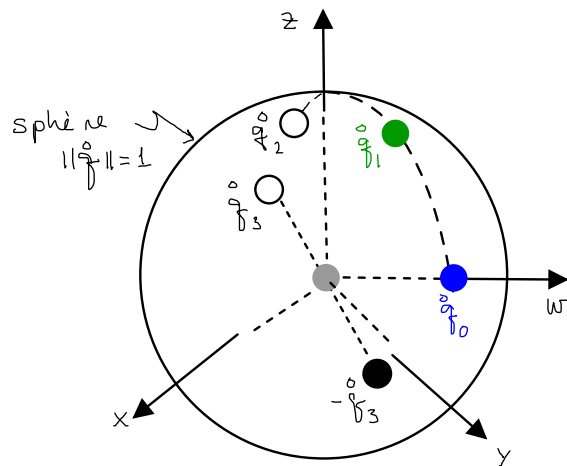
$$\theta = 2 \arccos w = 2 \arcsin \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\Rightarrow w = \cos \frac{\theta}{2}$$

En s'appuyant sur les bases théoriques et conceptuelles ci-dessus, on peut maintenant voir comment les quaternions unitaires peuvent être exploités en pratique pour représenter les rotations.

Les **quaternions unitaires** sont intimement liés à la représentation des rotations par axe de rotation / angle.

Tel qu'illustré sur la figure ci-dessous, les **quaternions unitaires** ( $\|q\|=1$ ) résident sur la **sphère unitaire** et deux quaternions **anti-podaux** ( $q$  et  $-q$ ) représentent la **même rotation**.



A part cette dualité de représentation de la même rotation par deux quaternions de signes opposés, la représentation d'une rotation par un quaternion est **unique**. Ceci est différent des matrices de rotation (car plusieurs représentations différentes (angles d'Euler, roll-pitch-yaw, etc.) peuvent produire le même résultat final).

De plus, la représentation des rotations par les **quaternions unitaires** est **continue** (voir figure de la page précédente) ce qui signifie que deux rotations voisines correspondent à deux points voisins sur la sphère unité. Il en va tout autrement des matrices de rotation car deux rotations voisines peuvent donner des matrices de rotation très différentes.

L'expression d'un **quaternion unitaire** représentant une rotation de  $\theta$  autour d'un axe représenté par le vecteur unitaire  $\underline{n}$  prend la forme suivante :

$$\underline{q} = \begin{bmatrix} w \\ \underline{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \underline{n} \end{bmatrix}$$

La **formule de Rodrigues** permettant de calculer la matrice de rotation correspondant à une rotation de  $\theta$  autour d'un axe  $\underline{n}$  s'écrit comme suit :

$$\underline{R}(\underline{n}, \theta) = \underline{I} + \sin\theta [\underline{n}]_x + (1 - \cos\theta) [\underline{n}]_x^2$$

où  $\underline{I}$  est la **matrice identité** 3x3 et  $[\underline{n}]_x = \begin{bmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{bmatrix}$

En utilisant les identités trigonométriques suivantes :

$$\sin\theta = 2 \sin(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\theta}{2}) \quad \text{et} \quad (1 - \cos\theta) = 2 \sin^2(\frac{\theta}{2})$$

On peut calculer l'expression de la matrice de rotation correspondant au quaternion

$$\underline{R}(\underline{q}) = \underline{R}(\underline{n}, \theta) = \underline{I} + 2w[\underline{v}]_x + 2[\underline{v}]_x^2$$

$$\text{avec} \quad [\underline{v}]_x = \begin{bmatrix} 0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\underline{v}]_x^2 = \begin{bmatrix} -v_y^2 - v_z^2 & v_x v_y & v_x v_z \\ v_x v_y & -v_x^2 - v_z^2 & v_y v_z \\ v_x v_z & v_y v_z & -v_x^2 - v_y^2 \end{bmatrix}$$

Ce qui donne

$$R(\hat{q}) = \begin{bmatrix} 1 - 2(N_y^2 + N_z^2) & 2(N_x N_y - N_z w) & 2(N_x N_z + N_y w) \\ 2(N_x N_y + N_z w) & 1 - 2(N_x^2 + N_z^2) & 2(N_y N_z - N_x w) \\ 2(N_x N_z - N_y w) & 2(N_y N_z + N_x w) & 1 - 2(N_x^2 + N_y^2) \end{bmatrix}$$

Les termes diagonaux peuvent être plus symétriques si on remplace  $1 - 2(N_y^2 + N_z^2)$  par  $(N_x^2 + w^2 - N_y^2 - N_z^2)$ , etc.

$$R(\hat{q}) = \begin{bmatrix} N_x^2 + w^2 - N_y^2 - N_z^2 & 2(N_x N_y - N_z w) & 2(N_x N_z + N_y w) \\ 2(N_x N_y + N_z w) & -N_x^2 + N_y^2 + w^2 - N_z^2 & 2(N_y N_z - N_x w) \\ 2(N_x N_z - N_y w) & 2(N_y N_z + N_x w) & -N_y^2 - N_x^2 + N_z^2 + w^2 \end{bmatrix}$$

Ces expressions suggèrent que les rotations appliquées à un point par un quaternion unitaire peuvent être vues comme une série de produits vectoriels et de mise à l'échelle.

Fort heureusement, il n'est pas nécessaire de transformer les quaternions en matrices de rotation avant d'appliquer les rotations sur un point. Les quaternions unitaires peuvent être utilisés directement.

Soit un **quaternion unitaire**  $\hat{q}$  représentant une rotation de  $\theta$  autour d'un axe de rotation selon le vecteur unitaire  $\underline{u}$  :

$$\hat{q} = \begin{bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \underline{u} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

Si  $\underline{N}$  est un vecteur représentant un **point** dans l'espace 3D, on peut montrer que l'opération de **conjugaison** :

$$\underline{N}' = \hat{q} \underline{N} \hat{q}^{-1}$$

applique la rotation à  $\underline{N}$ . Ici  $\hat{q}^{-1}$  est le **conjugué** de  $\hat{q}$ . Le vecteur  $\underline{N}$  peut être vu comme le quaternion  $\hat{N} = \begin{bmatrix} \underline{N} \\ 0 \end{bmatrix}$  dans la multiplication ci-dessus.

La multiplication de **quaternions unitaires** correspond à la **composition de rotations**. Ainsi, si les quaternions unitaires  $\hat{q}$  et  $\hat{p}$  représentent une **rotation composée**, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \hat{p}\hat{q} \underline{N} (\hat{p}\hat{q})^{-1} &= \hat{p}\hat{q} \underline{N} \hat{q}^{-1}\hat{p}^{-1} \\ \Rightarrow \hat{p} (\hat{q} \underline{N} \hat{q}^{-1}) \hat{p}^{-1} &\Rightarrow \text{rotations successives} \end{aligned}$$

Par conséquent, pour la **rotation inverse**, on peut écrire :

$$\hat{q}^{-1} (\hat{q} \underline{N} \hat{q}^{-1}) \hat{q} = \hat{q}^{-1} \hat{q} \underline{N} \hat{q}^{-1} \hat{q} = \underline{N}$$

Finalement, le **cosé** d'un **quaternion unitaire** représente une rotation du **double de l'angle** autour de l'axe de rotation.

Ce résultat peut être étendu au cas de **n** rotations successives d'un même angle autour d'un axe de rotation

$$\hat{q}^n = \text{rotation de } n \times \theta \text{ autour de l'axe}$$


---