Etalonnage d’une caméra

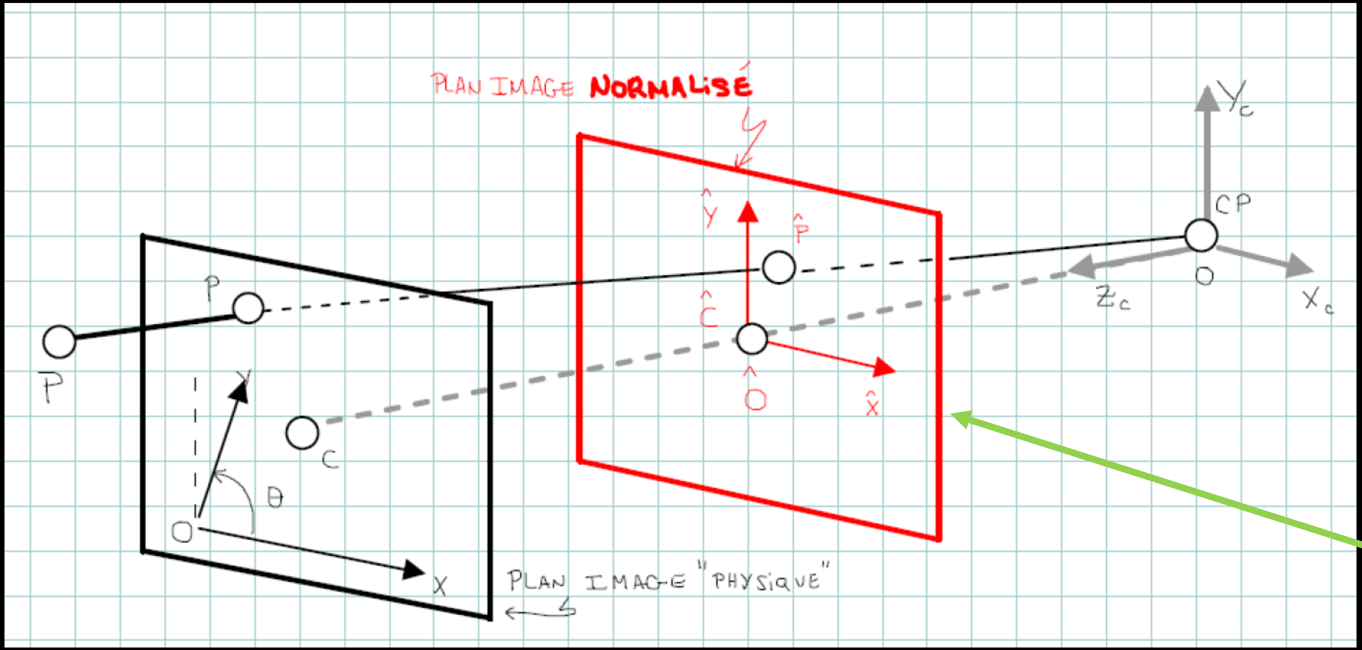
(on parle aussi de calibrage)

Patrick Hébert & Denis Laurendeau (Dernière révision : juin 2016)

Notion de **plan image normalisé**

(parfois utilisé pour simplifier les développements)

En plus du modèle de caméra sténopé non-inverseur vu précédemment, on retrouve aussi dans la littérature le concept de ***plan image normalisé*** illustré ci-dessous, qui facilite les manipulations pour certains problèmes:



Si on revient au modèle général de la projection de perspective:

$$\underline{\tilde{p}} = s\underline{\tilde{m}} = \underline{\underline{K}}_{3x3}\left[\underline{\underline{R}}^t \quad -\underline{\underline{R}}^t t\right]_{3x4}\underline{\tilde{P}}_w$$

le facteur d'échelle ***s*** implique que l'échelle du du problème est inconnue. Le plan image normalisé assume que la focale du sténopé (paramètre ***f*** dans la matrice des paramètres intrinsèques ***K***) est unitaire (f = 1) et que le paramètre θ de ***K*** est nul.

Avec la géométrie ci-dessus pour le plan image normalisé, la projection de perspective peut s'écrire (avec f = 1):

$$\hat{u} = \frac{x}{z} \qquad \hat{v} = \frac{y}{z}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

en posant $\tilde{\hat{p}} = \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ 1 \end{bmatrix}$ on peut écrire:

$$\tilde{\hat{p}} = \frac{1}{z} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tilde{P}$$

c'est le terme en 1/f vu précédemment avec f =1

$$z\,\tilde{\hat{p}} = \widetilde{M}\,\tilde{P}$$

Calibrage avec le **plan image physique**

Pour le plan image **physique**

Si on veut travailler en vraies grandeurs (i.e. dans le **plan image physique** plutôt que dans le plan image normalisé), il faut transformer les coordonnées images mesurées en ***mm*** en coordonnées images exprimées en ***pixels***. On peut modéliser cette operation par les expressions suivantes:

$$u = \kappa f \frac{x}{z}$$

$$v = \iota f \frac{y}{z}$$

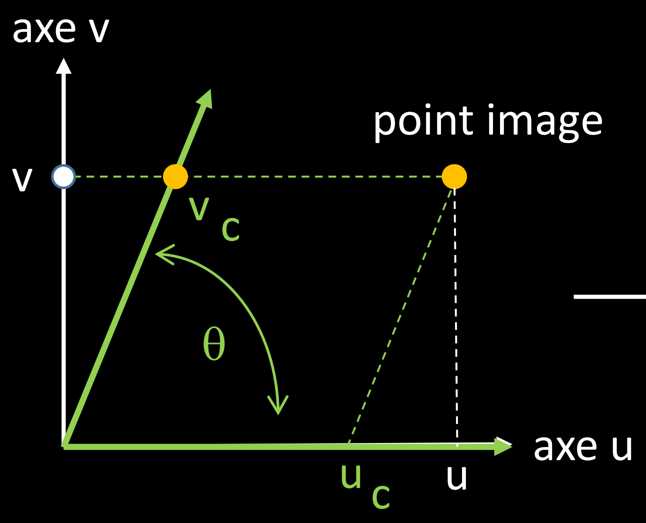
les paramètres κ et ι représentent des facteurs d'echelle en pixels / mm pour les axes x et y du plan image et f est la distance focale du sténopé et définit le "grossissement" de l'image.

On pose généralement $\alpha = \kappa f$ et $\beta = \iota f$ de sorte qu'on n'a pas à calibrer f comme tel, mais simplement α et β

Nous avons aussi vu que le repère image “capteur” est décalé de u_0 et v_0 par rapport au repère image, ce qui revient à écrire:

$$u = \alpha \frac{x}{z} + u_0 \qquad\qquad v = \beta \frac{y}{z} + v_0$$

Si les axes du repère “affine” de la caméra ne sont pas orthogonaux, on doit prendre en compte la situation géométrique suivante dans le modèle lors du calibrage:



$$\sin(\theta) = \frac{v}{v_c}$$ en tenant compte de la translation $$v_c = \frac{\beta\, y}{z \sin(\theta)} + v_0$$

$$\tan(\theta) = \frac{v}{u - u_c}$$ en tenant compte de la translation $$u_c = \frac{\alpha x}{z} - \frac{\alpha \cot(\theta) y}{z} + u_0$$

$\frac{y}{z}$ mis à l’echelle **selon l’axe u**

Avec ces derniers développement on peut écrire la transformation permettant de passer du plan image normalisé au plan image physique:

Point image sur le plan image physique → $\underline{p}_c = \underline{\underline{K}}\,\underline{\hat{p}} = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha\cot(\theta) & u_0 \\ 0 & \dfrac{\beta}{\sin(\theta)} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{\hat{p}}$ ← Point image sur le plan image normalisé

À la diapo 4 on a déjà établi que:

$$\underline{\tilde{\hat{p}}} = \frac{1}{z}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{\tilde{P}}_{camera}$$

Avec ce qui précède on peut écrire:

$$\underline{\tilde{p}} = \frac{1}{z}\begin{bmatrix} \alpha & -\alpha\cot(\theta) & u_0 \\ 0 & \dfrac{\beta}{\sin(\theta)} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{\tilde{P}}_{camera}$$

Dans le **repère de la caméra**, on peut donc écrire que la **projection de perspective** a pour expression:

$$\boxed{z\underline{\tilde{p}} = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha\cot(\theta) & u_0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\beta}{\sin(\theta)} & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{\tilde{P}}_{camera}}$$

Dans le **repère “world”**, on peut finalement écrire que la **projection de perspective** pour laquelle **il faut calibrer les paramètres** a pour expression:

$$z\underline{\tilde{p}}_c = [\underline{\underline{K}} \quad \underline{0}] \begin{bmatrix} \underline{\underline{R}}^t & -\underline{\underline{R}}^t \underline{t} \\ \underline{0}^t & 1 \end{bmatrix} \underline{\tilde{P}}_{\ world}$$

Conversion du plan image normalisé au plan image physique (matrice 3 x 3)

Vecteur de “padding” (3 x 1)

Vecteur exprimant la translation du repère “world” dans le repère caméra (vecteur 3 x 1)

Matrice exprimant la rotation du repère “world” dans le repère caméra (matrice 3 x 3)

On peut aussi simplifier à l’expression vue au chapitre précédent:

$$z\underline{\tilde{p}}_c = \underline{\underline{K}}\left[\underline{\underline{R}}^t \quad -\underline{\underline{R}}^t \underline{t}\right]\underline{\tilde{P}}_{\ world}$$

Pour simplifier, on écrit:

$$\underline{\underline{\rho}}_{\ 3x3} = \underline{\underline{R}}^{t} = \begin{bmatrix} \underline{\rho}_1^t \\ \underline{\rho}_2^t \\ \underline{\rho}_3^t \end{bmatrix}$$

où les $\underline{\rho}_i^t \ldots i = 1{,}2{,}3$ sont les lignes de la transposée de la matrice de rotation

et

$$-\underline{\underline{R}}^{t}\underline{t} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$$

où le vecteur t représente la translation du repère "world" dans le repère caméra

On peut rendre la notation encore plus compacte pour les fins du calibrage en écrivant simplement

$$z\underline{\tilde{p}}_c = \underline{\underline{M}}_{3x4}\underline{\tilde{P}}_{4x1\ world} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \end{bmatrix} \underline{\tilde{P}}_{4x1\ \ world}$$

ou encore

$$z\underline{\tilde{p}}_c = \begin{bmatrix} m_1^t \\ m_2^t \\ m_{\substack{1\\3}}^t \end{bmatrix} \underline{\tilde{P}}_{4x1\ world}$$

éléments non-nuls quand c'est une transformation projective

En utilisant l'expression de $\underline{\underline{K}}$ et $\underline{\underline{\rho}}$ on a pour les éléments de $\underline{\underline{M}}$

$$\begin{bmatrix} m_1^t \\ m_2^t \\ m_3^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\underline{\rho}_1^t - \alpha\cot(\theta)\underline{\rho}_2^t + u_0\underline{\rho}_3^t & \alpha t_x - \alpha\cot(\theta)t_y + u_0 t_z \\ \dfrac{\beta}{\sin(\theta)}\underline{\rho}_2^t + v_0\underline{\rho}_3^t & \dfrac{\beta}{\sin(\theta)}t_y + v_0 t_z \\ \underline{\rho}_3^t & t_z \end{bmatrix}$$

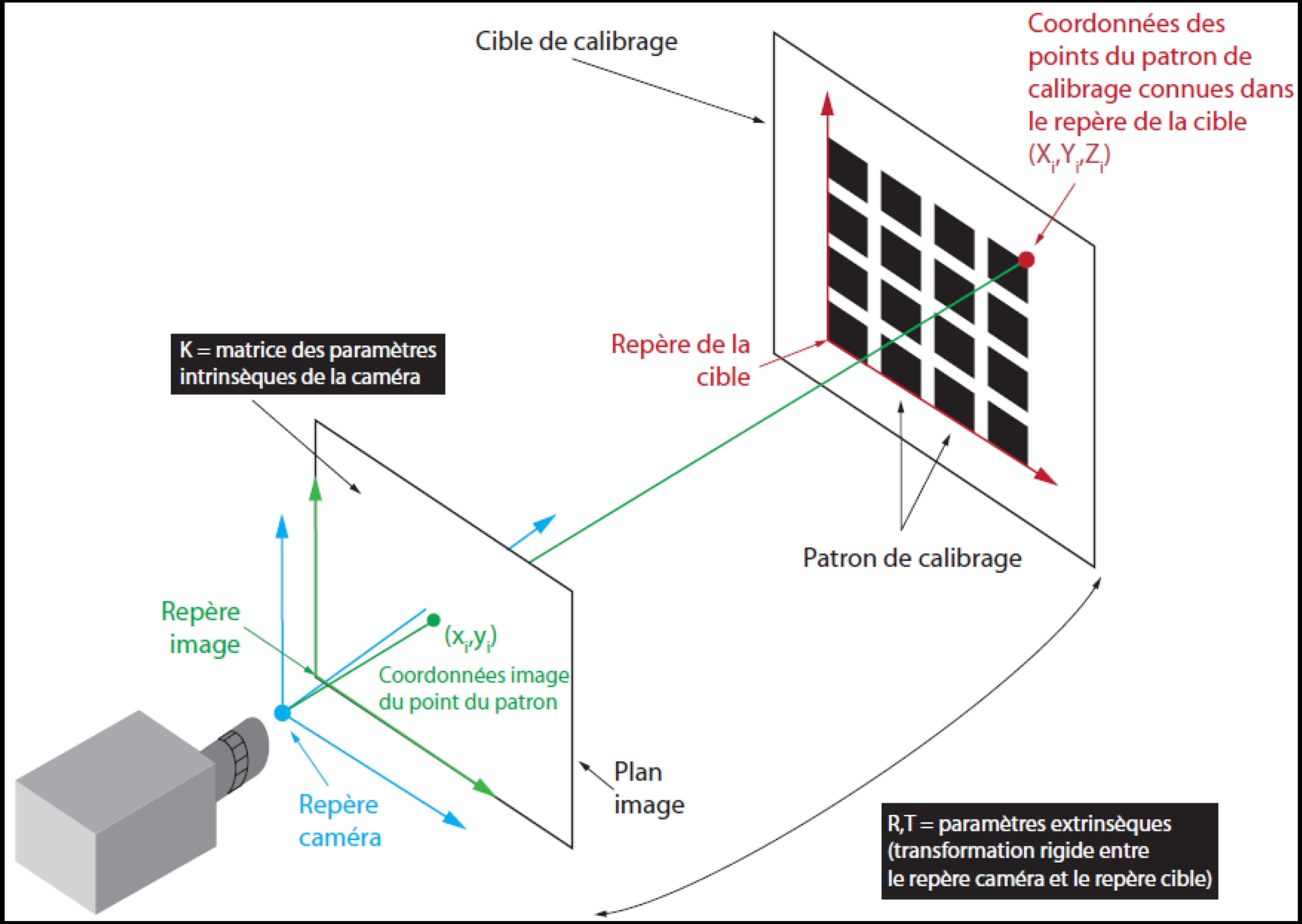
Matrice 3 x 3 Vecteur 3 x 1

La matrice $\underline{\underline{M}}$ comporte 12 composantes, mais seulement **11 sont indépendantes** car si on met m_{34} en évidence, il peut être assimilé au facteur d'échelle de $\underline{\tilde{p}}_c$ dans $z\,\underline{\tilde{p}}_c = \underline{\underline{M}}_{3x4}\underline{\tilde{P}}_{4x1\,world}$

Calibrer la caméra consiste à estimer les 11 m_{ij} indépendants. A partir de ces 11 m_{ij} indépendants m_{ij} , on peut, si cela s'avère necessaire, estimer les paramètres **intrinsèques** $\alpha, \beta, \theta, u_0, v_0$ et les paramètres **extrinsèques** (les $\underline{\rho}_i^t \; et \; t_i$)

Il existe plusieurs méthodes pour estimer les composantes de la matrice M. La plupart de ces méthodes utilisent une **cible** de calibrage qui contient des points dont les coordonnées sont connues dans le **repère "world".** On observe les images de ces points dans le repère **image physique**. On obtient les correspondances $\underline{\tilde{p}}_c \leftrightarrow \underline{\tilde{P}}_{world}$ avec lesquelles on estime les composantes de la matrice M avec une approche d'optimisation.

Principe général



Approche de calibrage linéaire

Revenons à l’expression

$$z\underline{\tilde{p}}_c = \begin{bmatrix} m_1^t \\ m_2^t \\ m_{1_3}^t \end{bmatrix} \underline{\tilde{P}}_{4x1\,world}$$

qu’on peut développer comme suit pour expliciter la procédure de calcul

$$\begin{bmatrix} u_c \\ v_c \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{m}_1^t \\ \underline{m}_2^t \\ \underline{m}_3^t \end{bmatrix} \underline{\tilde{P}}_w$$

où $\underline{\tilde{P}}_w = [X_w \quad Y_w \quad Z_w \quad 1]^t$

Chaque point de calibrage fournit une paire $[u_{ci} \quad v_{ci} \quad s_i]^t \leftrightarrow \underline{\tilde{P}}_{wi}$ avec laquelle on peut écrire une équation

$$u_{ci} = \frac{\underline{m}_1^t \underline{\tilde{P}}_{wi}}{\underline{m}_3^t \underline{\tilde{P}}_{wi}} \quad , \quad v_{ci} = \frac{\underline{m}_2^t \underline{\tilde{P}}_{wi}}{\underline{m}_3^t \underline{\tilde{P}}_{wi}}$$

qu'on peut transformer ainsi:

$$(u_{ci}\underline{m}_3^t - \underline{m}_1^t)\underline{\tilde{P}}_{wi} = 0 \qquad (v_{ci}\underline{m}_3^t - \underline{m}_2^t)\underline{\tilde{P}}_{wi} = 0$$

qui sont des équations de plans car, si on les développe, prennent la forme

$Ax_{wi} + By_{wi} + Cz_{wi} + D = 0$ pour u_{ci} avec une forme semblable pour v_{ci}

Les inconnues à estimer sont les m_{ij} .

En retravaillant les équations pour u_{ci} et v_{ci} en fonction des m_{ij} on arrive à:

$$-\underline{\bar{P}}_{wi}^{t}\,\underline{m}_1 + 0\underline{m}_2 + u_{ci}\underline{\bar{P}}_{wi}^{t}\underline{m}_3 = 0$$

$$0\underline{m}_1 - \underline{\tilde{P}}_{wi}^{t}\underline{m}_2 + v_{ci}\underline{\bar{P}}_{wi}^{t}\underline{m}_3 = 0$$

pour chaque point de calibrage *i*. Si i= 1..n, on a “n” paires de correspondances “point image – point objet” et on peut donc écrire 2n équations sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} \underline{\tilde{P}}_{w1}^{t} & 0_{4x1}^{t} & -u_{c1}\underline{\tilde{P}}_{w1}^{t} \\ 0_{4x1}^{t} & \underline{\bar{P}}_{w1}^{t} & -v_{c1}\underline{\tilde{P}}_{w1}^{t} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{\tilde{P}}_{wn}^{t} & 0_{4x1}^{t} & -u_{cn}\underline{\tilde{P}}_{wn}^{t} \\ 0_{4x1}^{t} & \underline{\bar{P}}_{wn}^{t} & -v_{cn}\underline{\tilde{P}}_{wn}^{t} \end{bmatrix}_{2nx12} \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ \cdots \\ m_{33} \\ m_{34} \end{bmatrix}_{12x1} = 0$$

Ici, le vecteur 12 x 1:

$$\begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ \cdots \\ m_{33} \\ m_{34} \end{bmatrix}_{12x1}$$

est la matrice $\underline{\underline{M}}$ écrite sous forme de vecteur.

L'équation matricielle de la page précédente est un système d'équations linéaire homogène de forme $\underline{\underline{Q}}\,\underline{m} = \underline{0}$ qu'on résout avec une méthode comme la **décomposition en valeurs singulières** ("Singular Value Decomposition" - SVD) (nous verrons en quoi consiste la SVD plus tard).

Estimation des paramètres intrinsèques et extrinsèques à partir de la matrice caméra

Dans certaines applications (dont nous discuterons plus tard), la connaissance de la matrice $\underline{\underline{M}}$ est suffisante.

Dans d’autres cas, on peut être intéressé à obtenir les paramètres intrinsèques et extrinsèques du modèle sténopé.

Les étapes qui suivent montrent comment ces paramètres intrinsèques et extrinsèques peuvent être obtenus de la matrice $\underline{\underline{M}}$.

La première étape consiste à decomposer la matrice $\underline{\underline{M}}$ en deux sous matrices:

$$\underline{\underline{M}}_{3x4} = [\underline{\underline{A}}_{3x3} \quad \underline{b}_{3x1}]_{3x4}$$

Avec ce qu'on a vu à la p. 12, on peut écrire:

$$s\begin{bmatrix} \underline{a}_1^t \\ \underline{a}_2^t \\ \underline{a}_3^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\underline{\rho}_1^t - \alpha\cot(\theta)\underline{\rho}_2^t + u_0\underline{\rho}_3^t \\ \dfrac{\beta}{\sin(\theta)}\underline{\rho}_2^t + v_0\underline{\rho}_3^t \\ \underline{\rho}_3^t \end{bmatrix} \qquad (1)$$

facteur d'échelle

1- Calcul du facteur d'echelle *s*

Avec la troisième ligne de l'equation (1) on a que :

$$s\underline{a}_3^t = \underline{\rho}_3^t \qquad (2)$$

et, en prenant le module de chaque côté de (2):

$$\|s\underline{a}_3^t\| = \|\underline{\rho}_3^t\| = 1 \qquad (3)$$

et donc :

$$\boxed{\boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\|\underline{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{3}}\|} \quad \boldsymbol{o}\text{ù} \ (\boldsymbol{\varepsilon} = \mp \boldsymbol{1})} \qquad (4)$$

2- Calcul de $\underline{\rho}_3$

Avec (4) et (2) :

$$\boxed{\underline{\rho}_3 = s\underline{a}_3} \qquad (5)$$

3- Calcul de u_0

En prenant le produit scalaire de la première ligne de (1) avec $\underline{\rho}_3$ on a:

$$s\underline{a}_1^t\underline{\rho}_3 = \alpha\underline{\rho}_1^t\underline{\rho}_3 - \alpha\cot(\theta)\underline{\rho}_2^t\underline{\rho}_3 + u_0\underline{\rho}_3^t\underline{\rho}_3 \qquad (6)$$

Avec (6) et (5):

$$\boxed{u_0 = s^2\underline{a}_1^t\underline{a}_3}$$

4- Calcul de v_0

En prenant le produit scalaire de la deuxième ligne de (1) avec $\underline{\rho}_3$ on a:

$$s\underline{a}_2^t\underline{\rho}_3 = \frac{\beta}{\sin(\theta)}\underline{\rho}_2^t\underline{\rho}_3 + v_0\underline{\rho}_3^t\underline{\rho}_3 \qquad (7)$$

Avec (7) et (5):

$$\boxed{v_0 = s^2\underline{a}_2^t\underline{a}_3} \qquad (8)$$

5- Calcul de α

En prenant le produit vectoriel de la première ligne de (1) avec $\underline{\rho}_3$ et en utilisant une fois de plus (5) on a:

$$s\underline{a}_1 \times \underline{\rho}_3 = s^2 \underline{a}_1 \times \underline{a}_3 = -\alpha\underline{\rho}_2 - \cot(\theta)\underline{\rho}_1 \qquad (9)$$

Si on prend le ***module*** des vecteurs de chaque côté de l'égalité en (9) on a:

$$s^2 \|\underline{a}_1 \times \underline{a}_3\| = \| -\alpha\underline{\rho}_2 - \alpha\cot(\theta)\underline{\rho}_1\| = \left[\left(-\alpha\underline{\rho}_2 - \alpha\cot(\theta)\underline{\rho}_1\right)^t \left(-\alpha\underline{\rho}_2 - \alpha\cot(\theta)\underline{\rho}_1\right)\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (10)$$

En développant (10) et en isolant α, on obtient:

$$\boxed{\alpha = s^2 \|\underline{a}_1 \times \underline{a}_3\| \sin(\theta)} \qquad \alpha \text{ est} > 0 \text{ par définition} \qquad (11)$$

6- Calcul de β

En prenant le produit vectoriel de la deuxième ligne de (1) avec $\underline{\rho}_3$ et en utilisant une fois de plus (5) on a:

$$s^2 \underline{a}_2 \times \underline{a}_3 = \left[\frac{\beta}{\sin(\theta)}\underline{\rho}_2 + v_0\underline{\rho}_3\right] \times \underline{\rho}_3 = \frac{\beta}{\sin(\theta)}\underline{\rho}_2 \times \underline{\rho}_3 + v_0\underline{\rho}_3 \times \underline{\rho}_3 = \frac{\beta}{\sin(\theta)}\underline{\rho}_1 \qquad (12)$$

Si on prend le ***module*** des vecteurs de chaque côté de l'égalité en (12) on a:

$$s^2\|\underline{a}_2 \times \underline{a}_3\| = \left[\left(\frac{\beta}{\sin(\theta)}\underline{\rho}_1\right)^t \left(\frac{\beta}{\sin(\theta)}\underline{\rho}_1\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\|\beta\|}{\sin(\theta)} \qquad (13)$$

En isolant β dans (13) on obtient:

$$\boxed{\beta = s^2\|\underline{a}_2 \times \underline{a}_3\|\sin(\theta)} \qquad (14)$$

β est > 0 par définition

7- Calcul de θ

Pour calculer α et β de (11) et (14), il faut connaître θ. En revenant à (1), on peut effectuer l'opération suivante:

$$[\underline{a}_1 \times \underline{a}_3]^t[\underline{a}_2 \times \underline{a}_3] = \frac{-\alpha\beta\cot(\theta)}{s^4\sin(\theta)} \qquad (15)$$

On peut aussi prendre le produit du module des deux vecteurs à gauche de (15):

$$\|\underline{a}_1 \times \underline{a}_3\| \; \|\underline{a}_2 \times \underline{a}_3\| = \frac{\alpha\beta}{s^4\big(\sin(\theta)\big)^2} \qquad (16)$$

Le rapport de (15) et (16) donne:

$$\frac{[\underline{a}_1 \times \underline{a}_3]^t[\underline{a}_2 \times \underline{a}_3]}{\|\underline{a}_1 \times \underline{a}_3\| \; \|\underline{a}_2 \times \underline{a}_3\|} = -\cos(\theta) \qquad (17)$$

On a donc pour θ :

$$\boxed{\theta \;= \cos^{-1}\left[\frac{-[\underline{a}_1 \times \underline{a}_3]^t[\underline{a}_2 \times \underline{a}_3]}{\|\underline{a}_1 \times \underline{a}_3\|\|\underline{a}_2 \times \underline{a}_3\|}\right]} \qquad (18)$$

Rappelons que θ est très près de 90° pour les caméras numériques modernes.

8- Calcul de $\underline{\rho}_1$

Si on revient à (12):

$$\frac{\beta}{\sin(\theta)}\underline{\rho}_1 = s^2\underline{a}_2 \times \underline{a}_3 \tag{12}$$

On peut isoler $\underline{\rho}_1$

$$\boxed{\underline{\rho}_1 = \frac{s^2\sin(\theta)}{\beta}[\underline{a}_2 \times \underline{a}_3]} \tag{19}$$

9- Calcul de $\underline{\rho}_2$

$$\boxed{\underline{\rho}_2 = \underline{\rho}_3 \times \underline{\rho}_1} \tag{20}$$

Par une propriété de la matrice de rotation.

À cause de (4), il y a **deux solutions** possibles pour la matrice de rotation dépendant du signe de *s*.

L'ambiguïté peut être levée en observant la géométrie du problème de formation d'image pendant la phase de calibrage en vérifiant la plausabilité de la solution par inspection.

10- Calcul des paramètres extrinsèques de **translation**

En revenant à l'équation de projection de perspective établie à la p. 10:

$$z\underline{\tilde{p}}_c = [\underline{\underline{K}} \quad \underline{0}][\underline{\underline{R}}^t \quad -\underline{\underline{R}}^t \underline{t}]\underline{\tilde{P}}_{world}$$

qu'on peut écrire plus simplement:

$$z\underline{\tilde{p}}_c = [\underline{\underline{K}}_{3x3} \quad \underline{0}_{3x1}]\begin{bmatrix} & \underline{\underline{\rho}}_{3x3} & & \begin{matrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\underline{\tilde{P}}_w = s[\underline{\underline{A}} \quad \underline{b}]\underline{\tilde{P}}_w$$

On a que:

$$\underline{\underline{K}}_{3x3}\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} = s\underline{b}$$

et donc:

$$\boxed{\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} = s\underline{\underline{K}}^{-1}\underline{b}} \qquad (21)$$

En résumé

Intrinsèques

$$\boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\|\underline{\boldsymbol{a}}_3\|} \quad \boldsymbol{o}\text{ù} \ \ (\boldsymbol{\varepsilon} = \mp\mathbf{1})$$

$$u_0 = s^2 \underline{a}_1^t \underline{a}_3$$

$$v_0 = s^2 \underline{a}_2^t \underline{a}_3$$

$$\theta = \cos^{-1}\left[\frac{-[\underline{a}_1 \times \underline{a}_3]^t [\underline{a}_2 \times \underline{a}_3]}{\|\underline{a}_1 \times \underline{a}_3\| \|\underline{a}_2 \times \underline{a}_3\|}\right]$$

$$\alpha = s^2 \|\underline{a}_1 \times \underline{a}_3\| \sin(\theta)$$

$$\beta = s^2 \|\underline{a}_2 \times \underline{a}_3\| \sin(\theta)$$

Extrinsèques

$$\underline{\rho}_3 = s\underline{a}_3$$

$$\underline{\rho}_1 = \frac{s^2 \sin(\theta)}{\beta} [\underline{a}_2 \times \underline{a}_3]$$

$$\underline{\rho}_2 = \underline{\rho}_3 \times \underline{\rho}_1$$

$$\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} = s\underline{\underline{K}}^{-1}\underline{b}$$