Rotations dans le plan

Q1 : Quelle type de transformation préserve les angles et les distances entre les vecteurs?

Q2 : Quelle type de transformation ne préserve pas les angles, ne préserve pas les distances entre les vecteurs mais respecte le parallélisme?

Q3 : Est-ce que les transformations sont commutatives? Autrement dit, est-ce qu'une rotation suivie d'une translation équivaut à une translation suivie d'une rotation?

Q4 : Quelle(s) matrice(s) parmi les suivantes représente(nt) une rotation pure dans le plan? Assumez des valeurs non nulles là où il n'y a pas explicitement un zéro.

a) $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & T_x \\ \sin\theta & \cos\theta & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ Cx & Cy & 1 \end{bmatrix}$

Q5 : Quelles matrices parmi les suivantes représentent une rotation pure autour de l'origine dans un plan cartésien?

a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Q6 : Quelle(s) matrice(s) parmi les suivantes représente(nt) seulement une translation pure de **valeur** (Tx, Ty) dans un plan **cartésien** (le mot **cartésien** est important)? Assumez des valeurs non nulles là où il n'y a pas explicitement un zéro.

a)
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & T_x \\ 0 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
b)
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & T_x \\ 0 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
c)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
d)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
e)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
f)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & T_x \\ 1 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
g)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 1 & 0 & T_y \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
h)
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & T_x \\ 0 & 2 & T_y \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
i)

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & T_x \\ 0 & 2 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Q7 : Quelle(s) transformation(s) correspond(ent) à une translation de valeur (T_x, T_y) dans le plan cartésien?

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 2 \end{bmatrix}$$

Q8 : Que fait la matrice de transformation suivante dans le plan cartésien?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Q9 : Que fait la matrice de transformation suivante dans le plan cartésien?

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Q10 : Que fait la matrice de transformation suivante dans le plan cartésien?

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Q11 : Que fait la matrice de transformation suivante dans le plan cartésien?

$$\begin{bmatrix} 1 & \cot(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Q12 : Que fait la matrice de transformation suivante dans le plan cartésien?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cot(\theta) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Q13 : Soit le point $(2, 5, 0)^T$ en coordonnées homogènes. Où est situé ce point dans le plan cartésien?

Q14 : Soit le point $(\infty,\infty)^T$ dans le plan cartésien. Quelles sont les coordonnées homogènes de ce point?

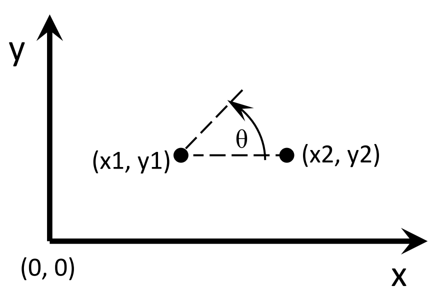
Q15 : Soit le point $(3, 5)^T$ dans le plan cartésien. Quelles sont les coordonnées homogènes de ce point? Donnez le cas général pour ce point particulier.

Q16 : Mise en situation. Vous êtes dans un véhicule blindé en opérations de combat. Une puissante explosion fait brutalement tourner votre véhicule de 30 degrés dans le sens positif (antihoraire) si l'on regarde le véhicule du dessus. Suite à l'explosion, vous consultez le radar qui indique que le véhicule ennemi qui vous a lancé l'obus est à la position (200, 50) dans le repère (X, Y) du radar. À quelle position dans le repère du radar le véhicule ennemi était avant l'explosion? Assumez que le radar et votre véhicule ont le même repère cartésien et que la rotation s'est effectuée autour de l'origine. Si vous utilisez Matlab, les fonctions `sin` et `cos` seront utiles.

Q17 : Un segment de droite a comme extrémités les points (0,0) et (4,0) et un autre segment de droite a comme extrémités les points (0,0) et (5,3). Quel est l'angle entre ces deux segments de droites? Si vous utilisez Matlab, les fonctions `dot`, `norm` et `acos` seront utiles.

Q18 : Soit le point $P = (x, y, 1)^T$, les matrices de translation T1 et T2 et la matrice de rotation R. Réécrivez la transformation suivante appliquée au point p, mais cette fois, sans les parenthèses : T2 x (R x (T1 x P)).

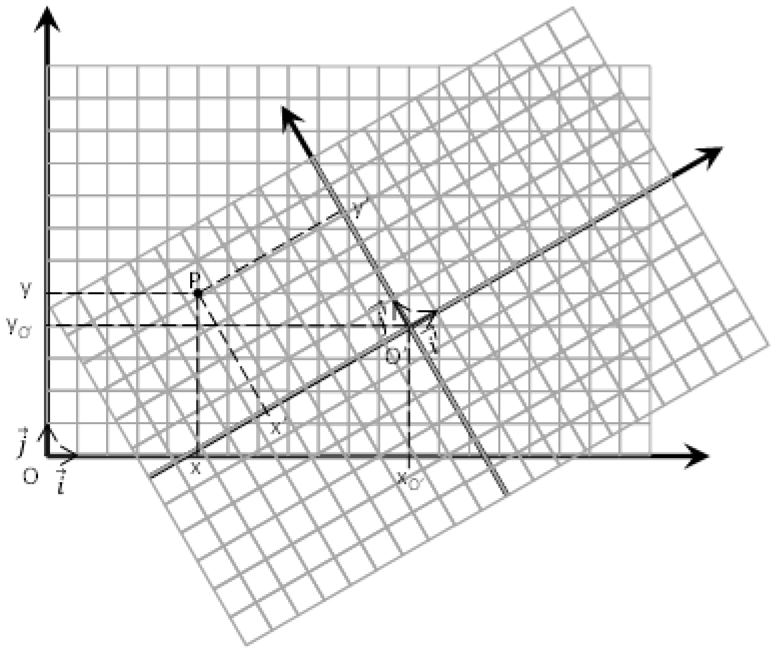
Q19 : Nous désirons effectuer une rotation θ du point p2(x2, y2) autour du point p1(x1, y1). Décrivez les étapes à suivre. Il n'est pas nécessaire de donner les matrices à cette étape, on veut surtout une explication en mots.



Q20 : Décrivez le problème précédent sous forme de produits de matrices et de vecteur.

Q21 : Changement de repère

Soient deux repères, R et R'. L'origine O' de R' a pour coordonnées (x_O, y_O) dans R et le vecteur $\vec{\imath}'$ forme un angle θ avec $\vec{\imath}$. Soit un point P de coordonnées (x,y) dans R. Quelles sont les coordonnées (x',y') dans R'?


y
P
y'
$y_{O'}$
O'
x'
$\vec{j}$
O
$\vec{i}$
x
$x_{O'}$