Mercredi le 23 avril 2014; Durée: 13h30 à 15h20
Aucune documentation permise; une calculatrice permise

Problème 1 (20 points sur 100)

Voici le tableau standard et la table des syndromes pour un code en bloc.

bits de message	001	010	011	100	101	110	111	**Syndrome**
0000000	***1101001***	***1011010***	***0110011***	***0111100***	***1010101***	***1100110***	***0001111***	**0000**
1000000	0101001	0011010	1110011	1111100	0010101	0100110	1001111	**1000**
0100000	1001001	1111010	0010011	0011100	1110101	1000110	0101111	**0100**
0010000	1111001	1001010	0100011	0101100	1000101	1110110	0011111	**0010**
0001000	1100001	1010010	0111011	0110100	1011101	1101110	0000111	**0001**
0000100	1101101	1011110	0110111	0111000	1010001	1100010	0001011	**0111**
0000010	1101011	1011000	0110001	0111110	1010111	1100100	0001101	**1011**
0000001	1101000	1011011	0110010	0111101	1010100	1100111	0001110	**1101**
1100000	0001001	0111010	1010011	1011100	0110101	0000110	1101111	**1100**
1010000	0111001	0001010	1100011	1101100	0000101	0110110	1011111	**1010**
0110000	1011001	1101010	0000011	0001100	1100101	1010110	0111111	**0110**
1001000	0100001	0010010	1111011	1110100	0011101	0101110	1000111	**1001**
0101000	1000001	1110010	0011011	0010100	1111101	1001110	0100111	**0101**
0011000	1110001	1000010	0101011	0100100	1001101	1111110	0010111	**0011**
1000100	0101101	0011110	1110111	1111000	0010001	0100010	1001011	**1111**
1110000	0011001	0101010	1000011	1001100	0100101	0010110	1111111	**1110**

A. Combien de vecteurs d’erreur peuvent être corrigés par ce code?

B. Combien de bits peuvent être corrigés par ce code?

C. Est-ce que le code est systématique?

D. Quelle est la distance minimale du code?

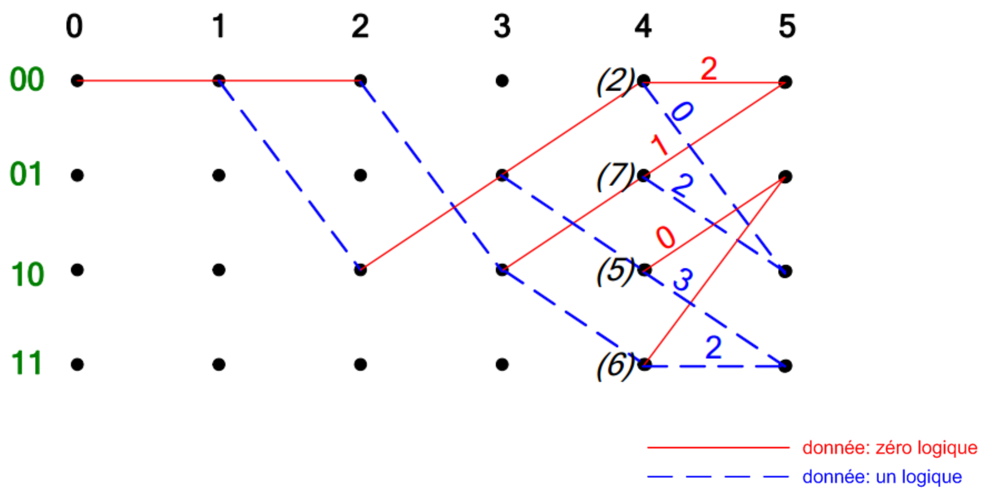
E. Quel est le taux de code?

F. Si la séquence reçue est 0011011, est-ce qu’il y a eu une erreur de transmission? Quelle est la sortie du décodeur pour 0011011?

G. Si la séquence reçue est 0110011, est-ce qu’il y a eu une erreur de transmission? Quelle est la sortie du décodeur pour 0110011?

Problème 2 (15 points) Algorithme de Viterbi

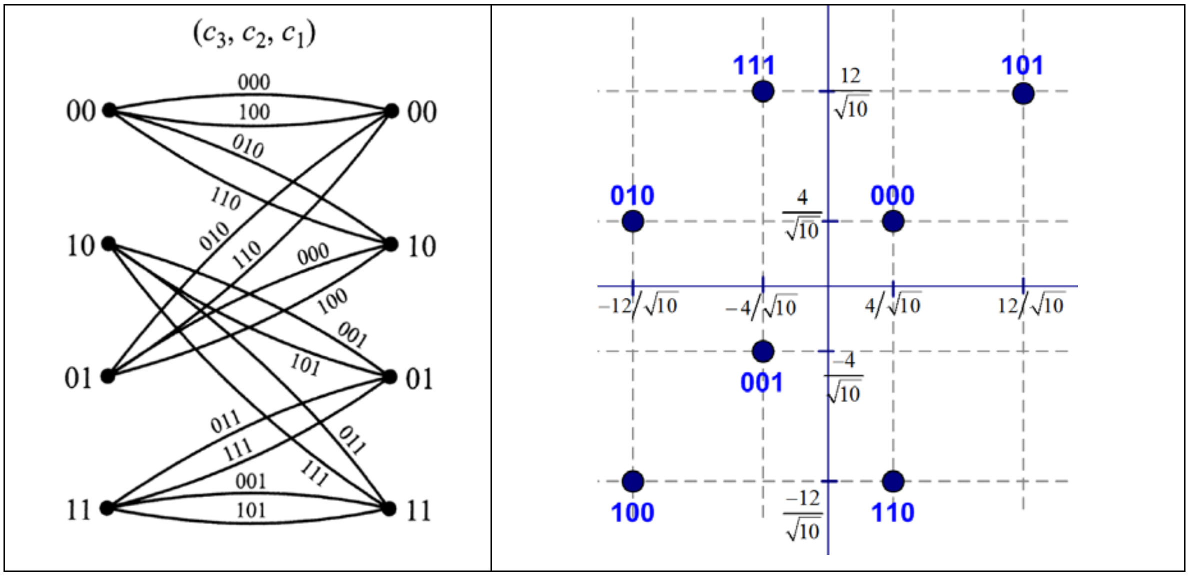
Considérons le décodeur de Viterbi suivant. Les métriques de chemin au temps 4 sont indiquées entre parenthèses pour chacun des quatre états. Les métriques de branche pour le temps 5 sont écrites à côté de chacune de huit transitions valides.



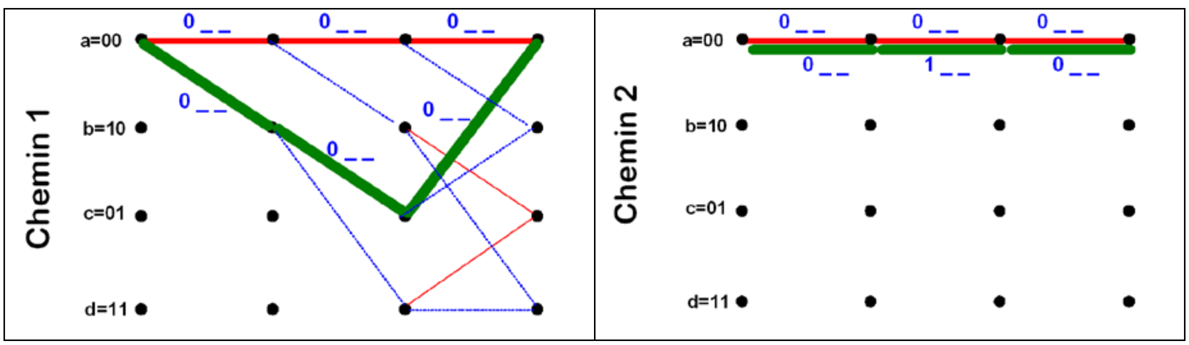
Quelle est la sortie du décodeur, c.-à-d. la séquence de cinq bits de données les plus probables? Est-ce qu'il y a eu des erreurs pendant la transmission? Si oui, combien?

Problème 3 (25 points) Modulation en treillis

Considérons le système TCM 8QAM suivant



Il y a deux possibilités pour le chemin avec la distance la plus courte, soit



Notons que sur chaque transition il y a trois bits de code. Le premier bit du code c_3, qui est égal au premier bit de données, est fourni pour chaque transition.

A. (5 points) Complétez les mots de code pour toutes les transitions dans les deux chemins.

B. (20 points) Trouvez les distances globales (métriques de chemin) pour les deux chemins en utilisant la distance euclidienne au carré.

Problème 4 (25 points sur 100) OFDM

La largeur de bande disponible pour un système OFDM est 500 kHz. Le système n'a pas besoin des bandes de garde ni des tonalités pilotes. Les contraintes du design d'une puce pour la radio permettent un décodeur Viterbi pour un code correcteur d'erreur avec longueur de contrainte de 7 et un format de modulation aussi grand que 32QAM. Nous limitons la perte en SNR à 0.8 dB pour l'exploitation d'un temps de garde. Nous limitons l'expansion en largeur de bande à 50% pour le code correcteur d'erreur, donc un taux de code de 2/3.

A. (15 points) Trouvez le design d'un système OFDM qui peut supporter un délai RMS aussi grand que 10 μsec. Il faut spécifier:

- Temps de garde
- Temps d'un symbole
- Espacement entre porteuses
- Nombre de porteuses
- Taux binaire maximal

B. (10 points) Quel est le taux binaire maximal du système quand nous avons besoin de 2 tonalités pilotes et une bande de garde de 10% de largeur de bande totale?

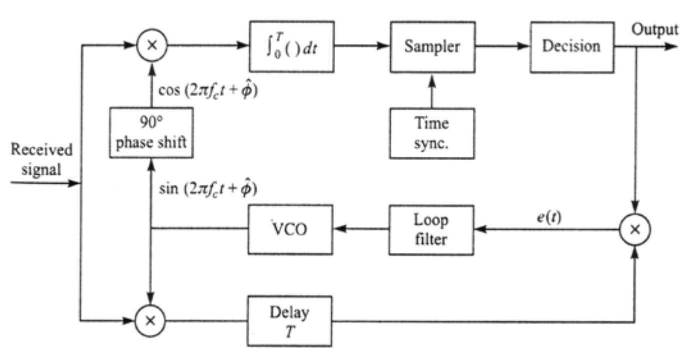
Problème 5 (15 points sur 100) PLL

A. (10 points) Voici quatre PLL. Classifiez chaque PLL selon la méthode de génération des références de phase, soit

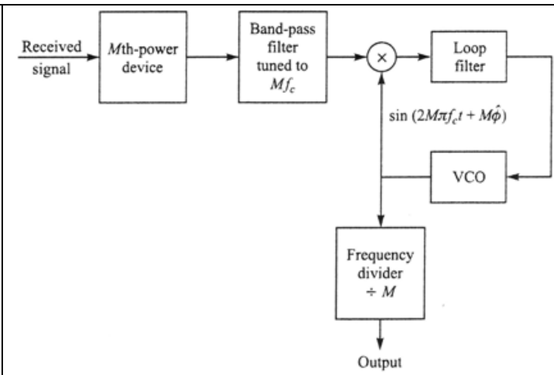
A) tonalité ou pilote

B) remodulation

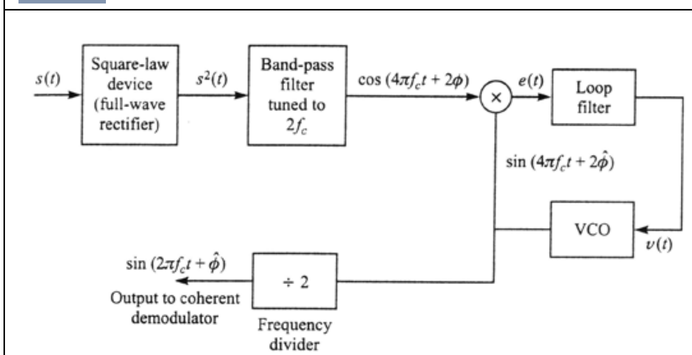
C) mettre signal reçu au carré (puissance quatre, etc.)



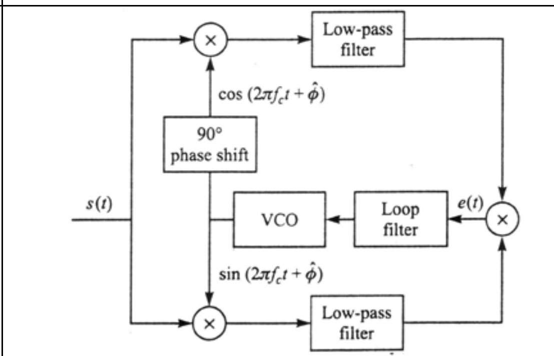
PLL 1



PLL 2

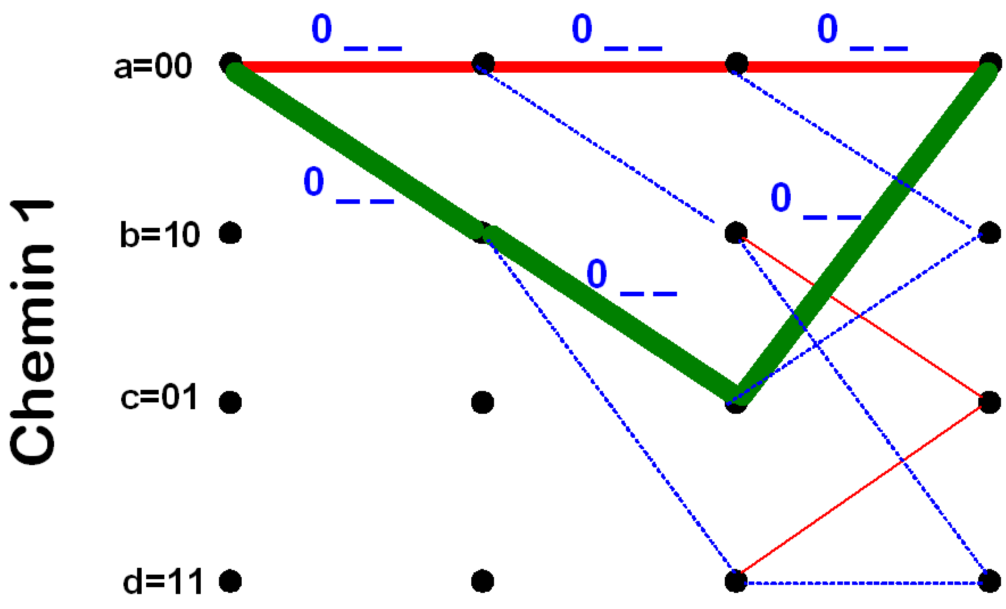


PLL 3

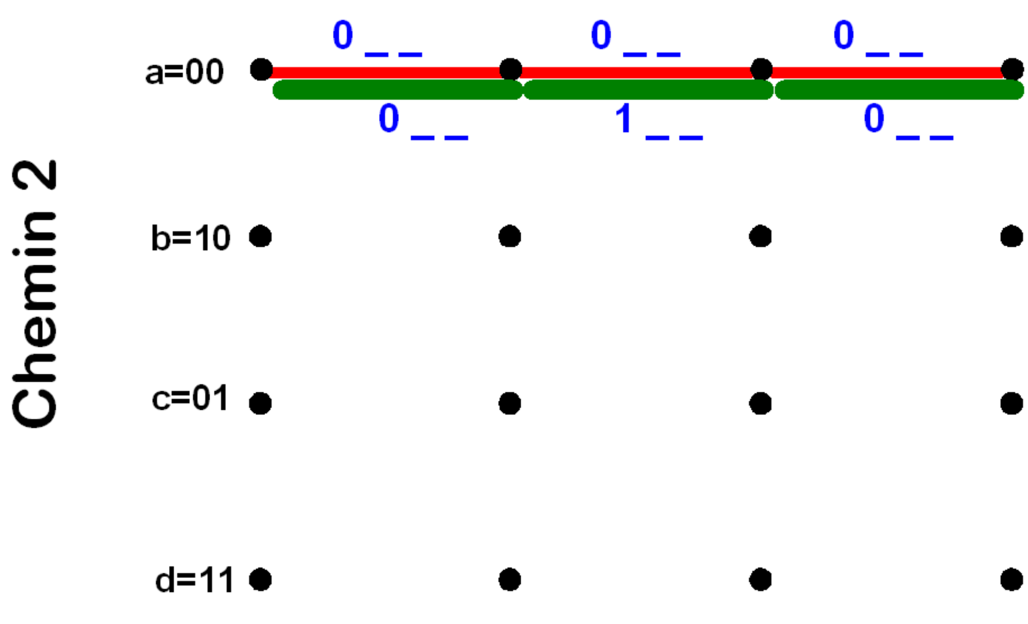


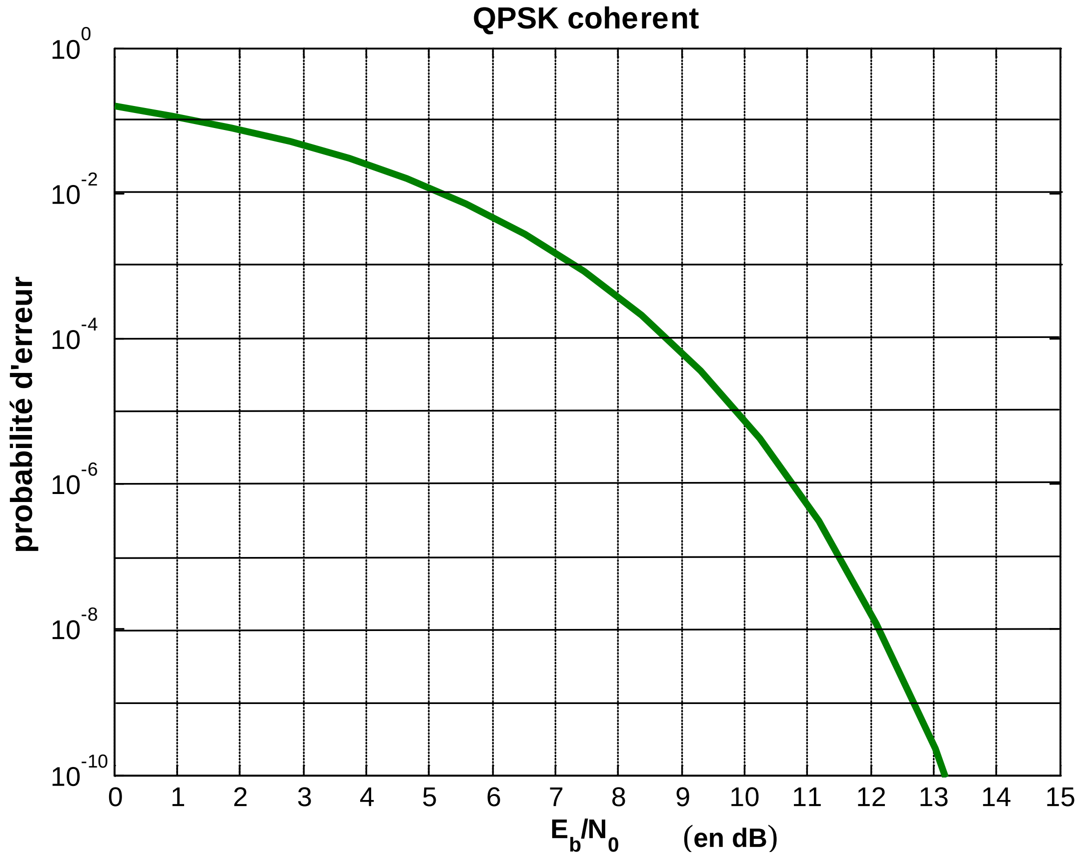
PLL 4

B. (5 points) Comment exploitons-nous le VCO dans une boucle à verrouillage? Utilisez une relation mathématique pour quantifier votre réponse.

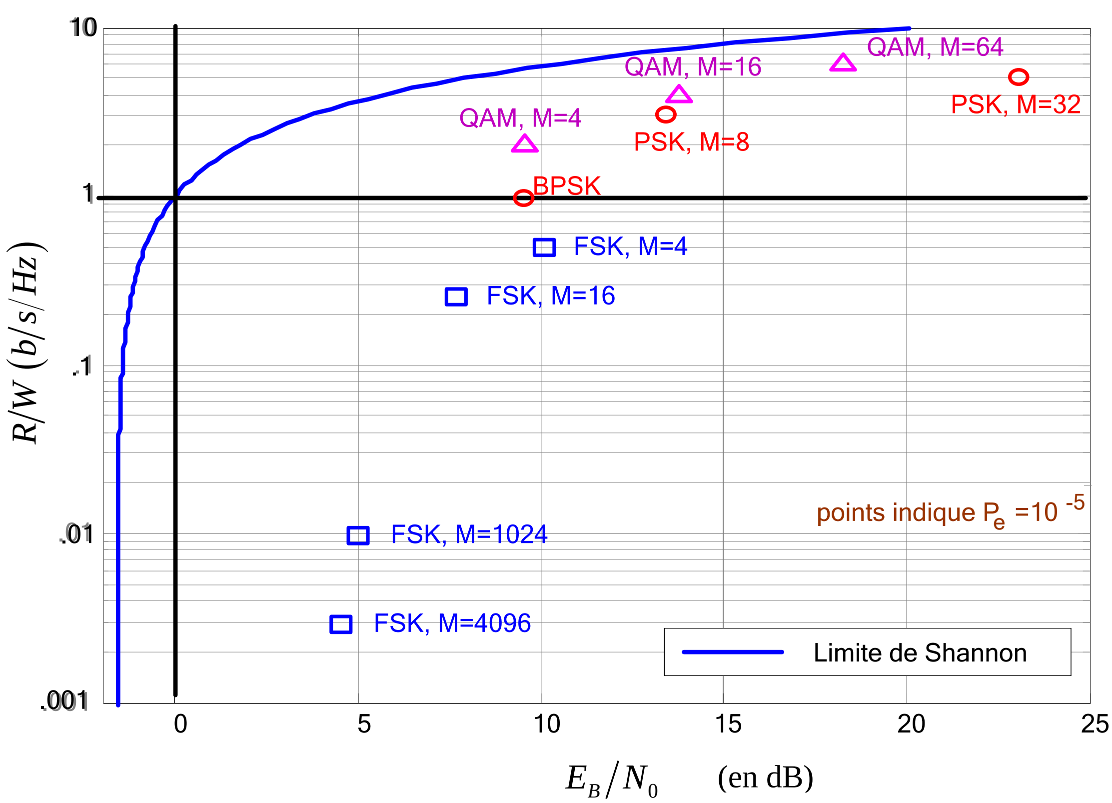


NOM & MATRICULE :

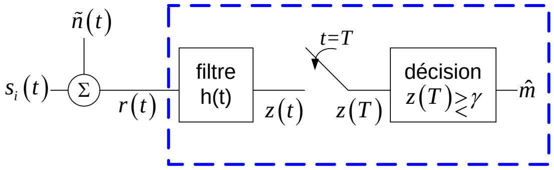




Plan de l'efficacité spectrale (Bandwidth Efficiency Plane)



Récepteur d'échantillonnage



MAP: i qui maximise $p(z|s_i)\, p(s_i)$

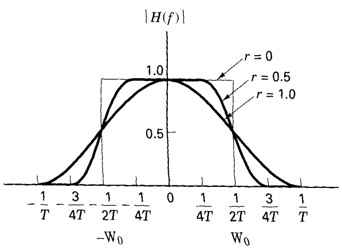
i qui minimise $\left\|\mathbf{r}-\mathbf{s}_i\right\|^2 - N_0 \ln P(\mathbf{s}_i)$

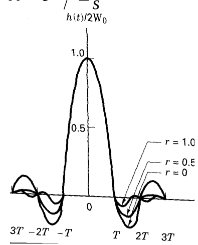
$P(\mathbf{s}_i)$ = probabilité a priori de symbole $\mathbf{s}_i$

ML: i qui maximise $p(z|s_i)$

i qui minimise $\left\|\mathbf{r}-\mathbf{s}_i\right\|^2$

Raised cosine $v(t) = \dfrac{\sin(\pi t/T_s)}{\pi t/T_s} \dfrac{\cos(r\pi t/T_s)}{1-4r^2t^2/T_s^2}$





Énergie moyenne

$$E_{moy} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left\|\mathbf{s}_i\right\|^2$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left[\text{énergie du signal } i\right]$$

Énergie par bit v. énergie par symbole

$$E_b \log_2 M = E_s$$

QAM $\eta = \log_2 M$ †

Conversion de l'espace I/Q vers espace du signal

$$\left(\tilde{a}_n^I, \tilde{a}_n^Q\right) = \sqrt{\frac{M \cdot E_s}{\sum_{i=1}^{M}\left[\left(a_n^I\right)^2 + \left(a_n^Q\right)^2\right]}}\left(a_n^I, a_n^Q\right)$$

coordonnées, espace du signal

coordonnées, espace I/Q

cas rectangulaire (carrée) $M=L^2$

$$P_e = 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{M}}\right)Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2 M}{(M-1)}\frac{E_b}{N_0}}\right) \qquad d_{\min} = \sqrt{\frac{6\log_2 L}{L^2-1}}$$

Borne d'union

$$P_e \approx \frac{2K}{M} Q\left(\frac{D_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right) = \frac{2K}{M} Q\left(d_{\min}\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

K est le nombre des paires des signaux séparés par la distance minimale D_{min}

Distance minimale dans l'espace du signal

$$D_{\min} = \min_{i \neq k}\left\|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_k\right\| \text{ et } d_{\min} = \frac{D_{\min}}{\sqrt{2E_b}}$$

$$P_e(BPSK) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

$$P_e(OOK) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

$$P_e(QPSK) \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

Perte par rapport à QPSK

$$d_{\min} = \sqrt{x}\sqrt{2} \qquad \text{perte} = -10\log_{10} x$$

Pour une modulation orthogonale

$$P_e(bit) = P_b = P_e(symbol)\frac{M/2}{M-1}$$

Pour une modulation non-orthogonale avec codage de gray

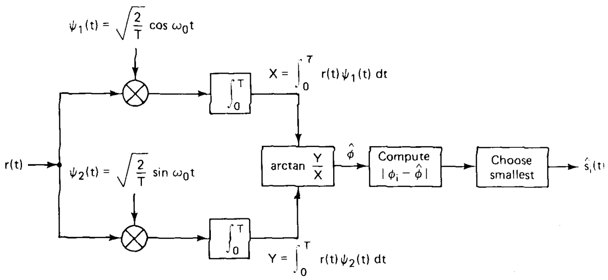
$$P_e(bit) = P_b = \frac{P_e(symbol)}{\log_2 M}$$

Efficacité spectrale

$$\eta = \frac{R_b}{W} = \frac{1}{T_b}\frac{1}{W} \text{ bits/s/Hz}$$

MPSK cohérent

$$\eta = \log_2 M\ ^{\dagger}$$

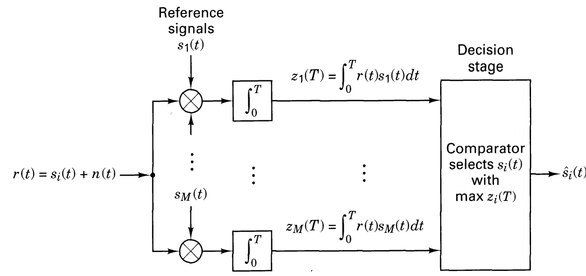


$$P_e(M) \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \sin\frac{\pi}{M}\right)$$

$$= 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b \log_2 M}{N_0}} \sin\frac{\pi}{M}\right)$$

MFSK cohérent

$$\eta = \frac{2\log_2 M}{M+1}\ ^{\dagger}$$

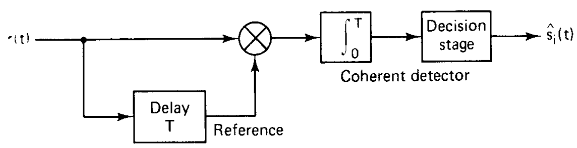


$$P_e = (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_b \log_2 M}{N_0}}\right)$$

Séparation minimale $1/2T_s$

DPSK incohérent

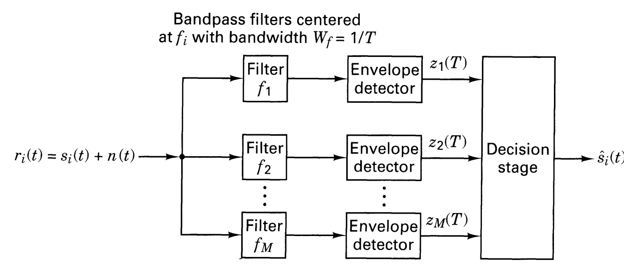
$$P_e = \frac{1}{2} e^{-E_b/N_0}$$



~1 dB de perte entre DPSK et BPSK

MFSK incohérent

$$\eta = \frac{\log_2 M}{M}\ ^{\dagger}$$



$$P_e(BFSK) = \frac{1}{2} e^{-E_b/2N_0}$$

~1 dB de perte BFSK cohérente vs. incohérente

Séparation minimale $1/T_s$

Loi de Shannon

$$C = W\log_2(1+SNR) \qquad SNR = \frac{E_b}{N_0}\eta$$

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{W}{C}\left(2^{C/W} - 1\right) \qquad \frac{C}{W} \to 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{E_b}{N_0} \to -1.6dB$$

Relations trigonométriques

θ	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$\tan\theta$
0	1	0	0
$\pi/8$	.85	.38	.41
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1
$\pi/3$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	0	1	∞

$$\tan(y) = x \Leftrightarrow y = \arctan x + k\pi$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Processus Gram Schmidt

$$\psi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{E_1}} s_1(t) \text{ où } E_1 = \int_0^T s_1^2(t)\,dt$$

$$\theta_2(t) = s_2(t) - \langle s_2(t), \psi_1(t)\rangle \psi_1(t)$$

$$E_2 = \int_0^T \theta_2^2(t)\,dt \qquad \psi_2(t) = \frac{\theta_2(t)}{\sqrt{E_2}}$$

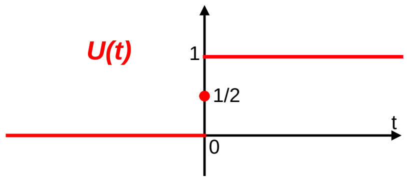
$$i. \quad \theta_i(t) = s_i(t) - \sum_{k=1}^{i-1} \langle s_i(t), \psi_k(t)\rangle \psi_k(t)$$

$$E_i = \int_0^T \theta_i^2(t)\,dt \qquad \psi_i(t) = \frac{\theta_i(t)}{\sqrt{E_i}}$$

† en supposant une impulsion Nyquist idéale

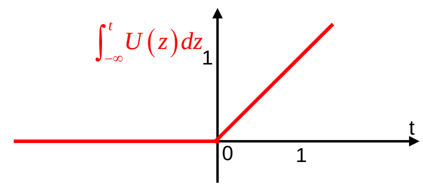
Fonction échelon

$$U(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t<0\\ 1 & \text{si } t>0\end{cases}=\int_{-\infty}^{t}\delta(z)\,dz \Leftrightarrow \frac{1}{j\omega}$$

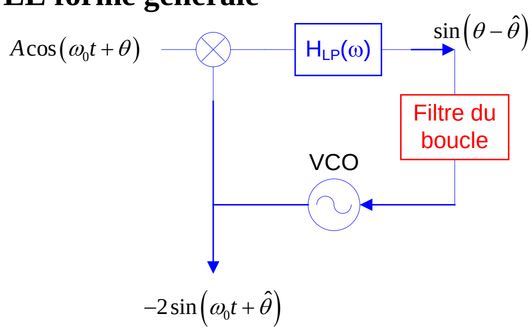


La Rampe:

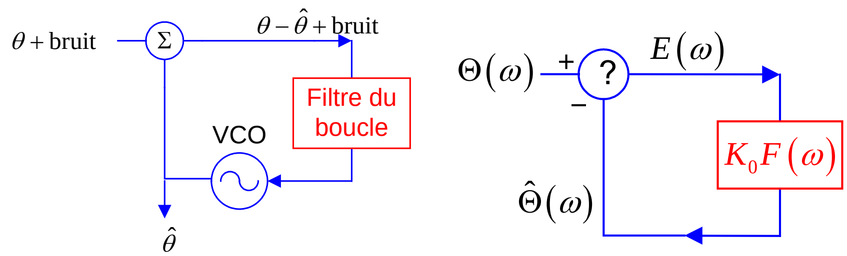
$$\int_{-\infty}^{t}U(z)\,dz=\begin{cases}0 & t<0\\ t & t>0\end{cases}\Leftrightarrow \frac{1}{(j\omega)^2}$$



PLL forme générale



PLL forme linéaire



fonction de transfert en boucle fermée

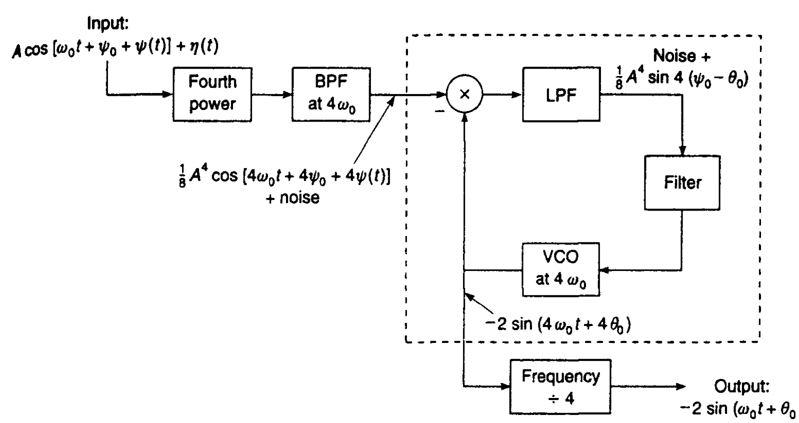
$$H(\omega)=\frac{\hat{\Theta}(\omega)}{\Theta(\omega)}=\frac{K_0F(\omega)}{j\omega+K_0F(\omega)}$$

erreur

$$E(\omega)=\frac{j\omega\,\Theta(\omega)}{j\omega+K_0F(\omega)}$$

Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{j\omega\to 0}j\omega E(\omega)$$



boucle passe-tout : $F(\omega)=1$

boucle passe-bas : $F(\omega)=\dfrac{\omega_1}{j\omega+\omega_1}$

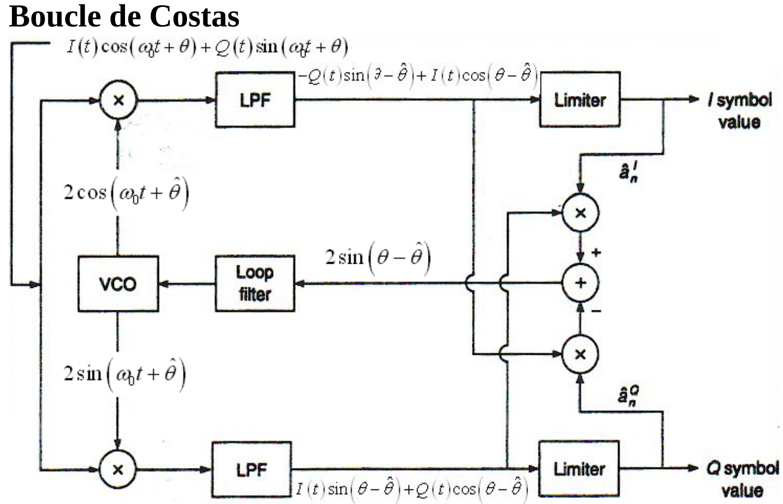
largeur equivalent du bruit:

$$B_N \,\square\, \frac{1}{|H(0)|^2}\int_0^{\infty}|H(2\pi f)|^2\,df$$

$$B_N=\frac{\omega_n}{8\varsigma}\ \text{pour}$$

$$\mathrm{H}(\omega)=\frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2+2\varsigma\omega_n\cdot j\omega+\omega_n^2}$$

Boucle de Costas



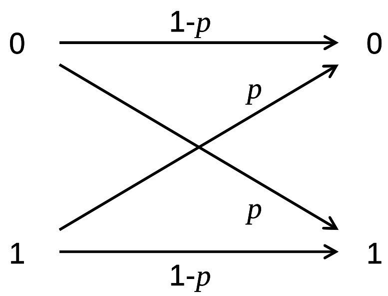
Corrélation croisée

$$z_{ij} \triangleq \int_0^T s_j(t) s_i(t)\, dt$$

Matrices de Hadamard

$$H_{n+1} = \begin{bmatrix} H_n & H_n \\ H_n & \bar{H}_n \end{bmatrix}$$

Le canal binaire symétrique (BSC)



BPSK avec AWGN: $p = Q\left(\sqrt{2E_b/N_0}\right)$

Distance de Hamming

d(**u**,**v**) = # de positions de bits avec des valeurs différents dans les deux vecteurs **u** et **v**

Distance minimale

$$\min_{i,j} d(\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j) = \min_{j>2} \mathrm{w}(\mathbf{u}_j)$$

Probabilité d'erreur de bit p

Probabilité d'avoir plus que t **erreurs** de bits parmi un block de N bits

$$\sum_{k=t+1}^{N} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \approx \binom{N}{t+1} p^{t+1} (1-p)^{N-t-1}$$

$$\binom{N}{k} \equiv \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

Codes en bloc

m = message à encoder, **u** = mot de code généré

$$\mathbf{G} = [\mathbf{P} \mid \mathbf{I_k}] \qquad \mathbf{U} = \mathbf{mG}$$

$$\mathbf{H} = [\mathbf{I_{n\text{-}k}} \mid \mathbf{P}^T] \qquad \mathbf{S} = \mathbf{rH}^T$$

t = # d'erreurs qui peuvent être corrigés

$$t = \left\lfloor \frac{d_{\min} - 1}{2} \right\rfloor$$

Code Hamming (n,k)=(2^m-1,2^m-1-m)

Tableau Standard

- Première rangé – mots de codes valides
- Première colonne – erreurs corrigibles
- Tous les 2^n mots de codes possibles sont inclus dans la table
- Il n'y a pas de répétition des mots de code

Corriger une erreur

1. Détecter l'erreur $\mathbf{S} = \mathbf{rH^T} \neq 0 \Rightarrow$ erreur v
2. Identifier la rangé avec $\mathbf{e_j H^T} = \mathbf{rH^T}$
   i.e. le syndrome identifie le coset
3. Corriger l'erreur en calculant $\mathbf{U} = \mathbf{r} + \mathbf{e_j}$

(le mot de code dans la colonne de tableau standard où on trouve)

Codes convolutifs

Exemple: $k=1,\ n=2,\ K=3$

$g_1 = [1 \quad 1 \quad 1]$ $\qquad u_1 = r_1 + r_2 + r_3$

$g_2 = [1 \quad 0 \quad 1]$ $\qquad u_2 = r_1 + r_3$

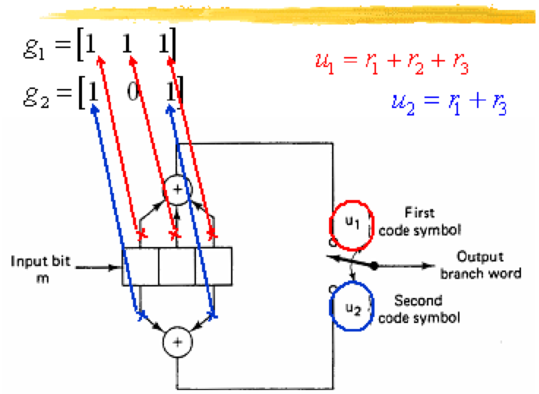
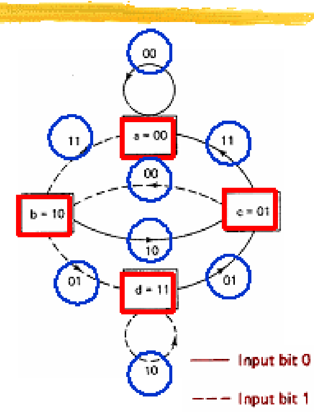


Diagramme de l'état

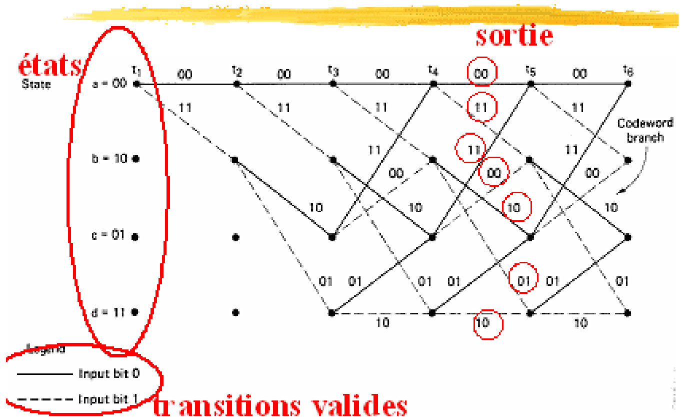
- Fixer les 2^{K-1} états
- Établir les transitions valides
- Générer les codes pour chaque transition



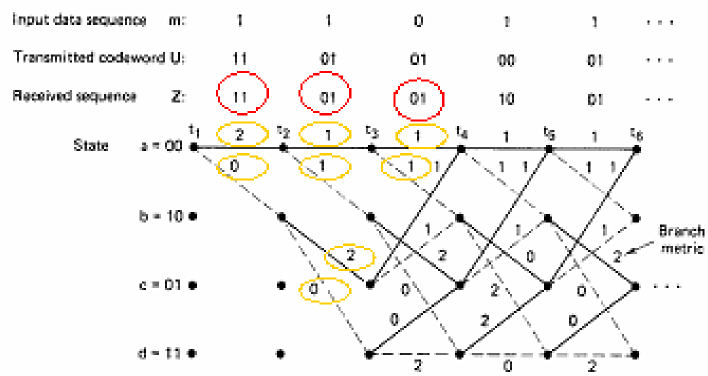
$g_1 = [1 \quad 1 \quad 1]$

$g_2 = [1 \quad 0 \quad 1]$

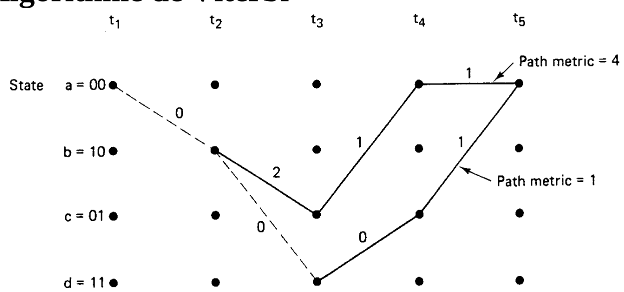
Treillis



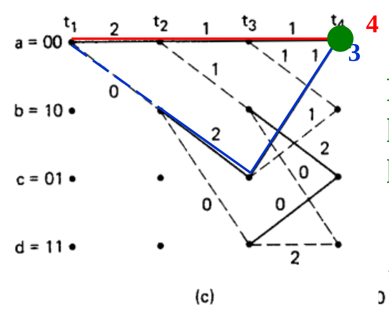
Algorithme de Viterbi



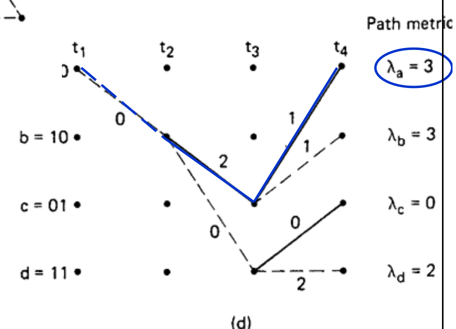
Algorithme de Viterbi



Algorithme de Viterbi



Focus:
le point de terminaison – le chemin vient d'ou?



Chapitre 7

Gain de codage: $10\log_{10} d_f^2 / d^2_{\text{min,sans codage}}$

Deux métriques $dist(z_i,u_i)$

- Distance de Hamming
  - Pour les décisions fermes
  - $dist(\underline{z}_i, \underline{u}_i) = \#$ de bits differents
- Distance euclidienne
  - Pour les décisions souples
  - $dist(\underline{z}_i, \underline{u}_i) = \underline{z}_i^T \cdot \underline{u}_i = \sqrt{(z_{i,1}-u_{i,1})^2 + \cdots + (z_{i,n}-u_{i,n})^2}$

Borne supérieur de gain de codage (en dB)

$10\log_{10} rd_f$ $\quad r$ = taux de codage = k/n

Valeurs typiques

- Décisions
  - Ferme
  - Souples avec 3 bits de quantification
- Longueur de contraint : $3 \le K \le 9$
- Taux de code : $r \ge 1/3$
- Chemin maximale : $h \le 5K$

Distance libre = distance minimale = d_f

- Codes linéaires
  - distance équivalent a la distance entre la séquence de zéros et n'importe quelle autre séquence
- Procédure
  1. Commence en état a
  2. Finir en état a
  3. Trajet le plus court ⇒ longueur = distance libre

t = # d'erreurs qui peuvent être corrigés

$$t = \left\lfloor \frac{d_f - 1}{2} \right\rfloor$$

TCM

Taux de codage = 1/*n*

- distance locale

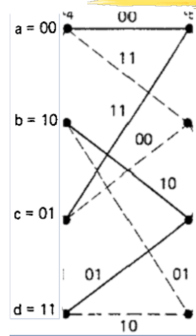
$$dist\left(\underline{u}_i,\underline{v}_i\right)=\sqrt{\left(u_{1_x}-v_{1_x}\right)^2+\left(u_{1_y}-v_{1_y}\right)^2}$$

- Définition de la distance globale (distance entre séquences, ou *SED square Euclidean distance*)

$$dist^2\left(U,V\right)=dist^2\left(\underline{u}_1,\underline{v}_1\right)+dist^2\left(\underline{u}_2,\underline{v}_2\right)+dist^2\left(\underline{u}_3,\underline{v}_3\right)+\cdots$$

pour le TCM et les décisions souples

Exemple



$u_1=m_1$ (pas codé)

$u_2\left(X\right)=m_2\left(X\right)g_1\left(X\right)$

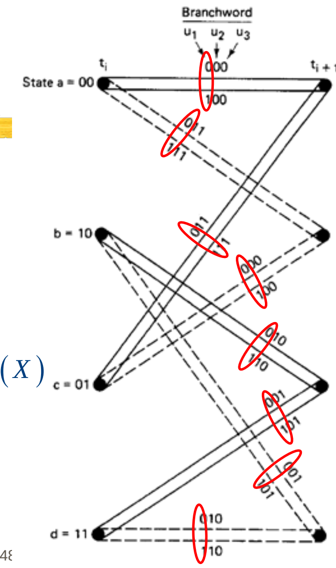
$u_3=m_2\left(X\right)g_2\left(X\right)$

codage convolutif

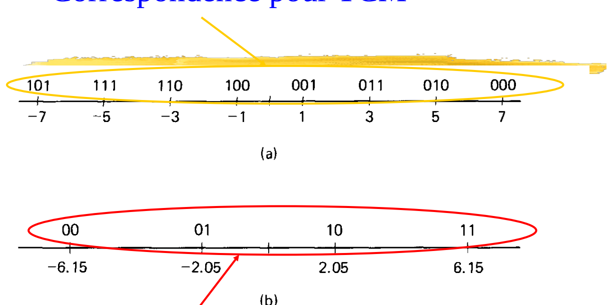
$g_1=\left[1\quad 1\quad 1\right]$

$g_2=\left[1\quad 0\quad 1\right]$

GEL10280/6448



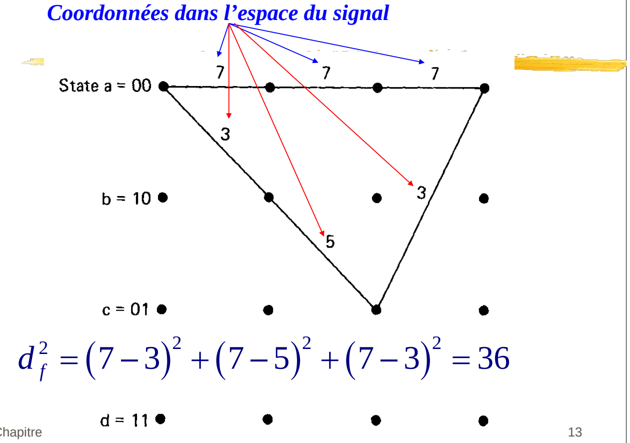
Correspondence pour TCM



Correspondence de Gray

Chapitre 9 GEL10280/64486 10

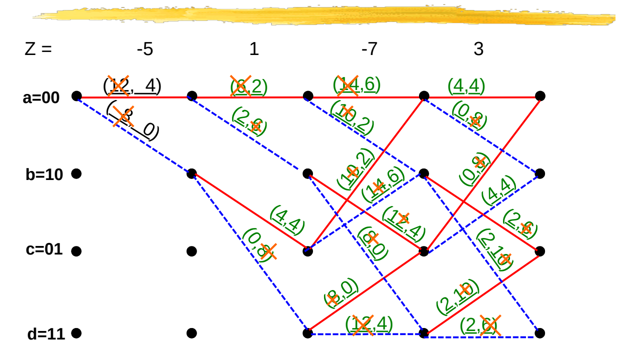
Coordonnées dans l'espace du signal



$$d_f^2=\left(7-3\right)^2+\left(7-5\right)^2+\left(7-3\right)^2=36$$

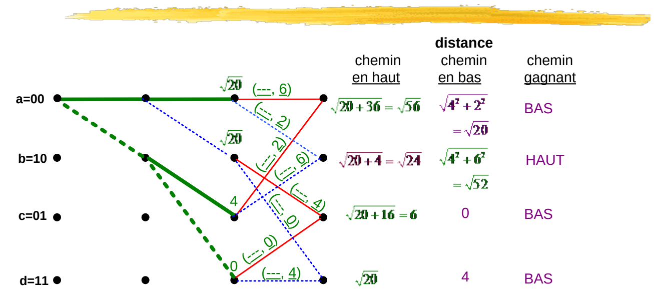
Chapitre 13

Calculer les distances locales



Chapitre 9 GEL10280/64486 22

Calculer les distances globales t=3

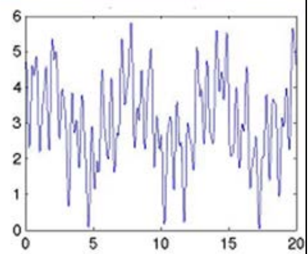


Chapitre 9 GEL10280/64486 25

Temps de garde

- Codage moyenne (2/3 ou 3/4)
  - » Temps de garde = 4 fois délai
- Codage forte (1/2)
  - » Temps de garde = 2 fois délai

Problème « point à moyenne »



Temps d'un symbole

- Perte en SNR du au temps de garde

$$SNR_{perte} = 10\log_{10}\frac{\text{temps util}}{\text{temps totale}} = 10\log_{10}\frac{\text{temps util}}{\text{temps d'un symbole}}$$

- Exemples

$$5:1 \quad 10\log_{10}\frac{5}{6} = .8\text{dB}$$

$$4:1 \quad 10\log_{10}\frac{4}{5} = 1\text{dB}$$

Niveau de codage

- Taux binaire livré vs. taux binaire de transmission
  - » taux binaire livré – taux après la correction d'erreur ou « sans codage »
  - » taux binaire de transmission – déterminé par la largeur de bande
- Relation avec le temps utile et nombre de porteuses

$$\text{taux sans codage} = \frac{\text{\# bits sans codage dans un "symbole" OFDM}}{\text{temps util+temps de garde}}$$

$$\begin{array}{c}\text{\# bits sans codage}\\ \text{dans un "symbole" OFDM}\end{array} = \text{\# de porteuses} \times \frac{\text{1 symbole codé}}{\text{porteuse}} \times \underbrace{\frac{\text{\# bits codés}}{\text{\# symboles codés}}}_{\text{modulation}} \times \underbrace{\frac{\text{\# bits non-codés}}{\text{\# bits codés}}}_{\text{codage}}$$

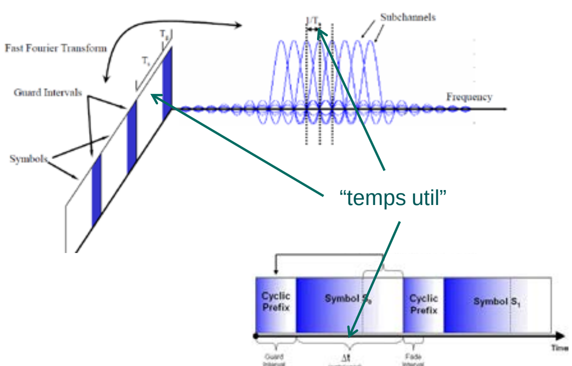
Nombre de porteuses

- Largeur de bande totale

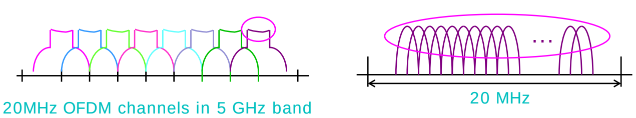
$$BW = \text{\# de porteuses} \times \frac{1}{\text{temps util}} = \frac{\text{\# de porteuses}}{\text{temps d'un symbole-temps de garde}}$$

- Larguer de bande d'un « sous canal »

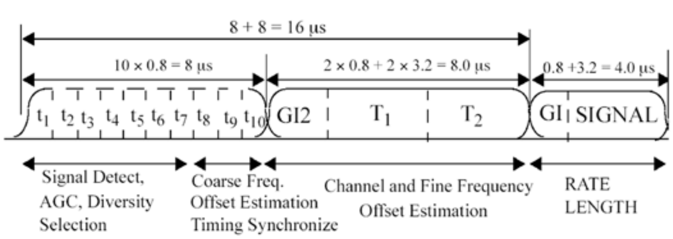
Largeur de bande



Design Example: 5GHz WLAN Standard



- 802.11a and Hiperlan II have very similar OFDM PHYs:
  - » 20 MHz channel is divided into 64 carriers
  - » Carriers are coded with varying modulation and error correction code.
  - » Each carrier is ~300kHz wide, giving raw data rates from 125kb/s to 1.5Mb/s



Data rate (Mbits/s)	Modulation	Coding rate (R)	Coded bits per subcarrier (N_{BPSC})	Coded bits per OFDM symbol (N_{CBPS})	Data bits per OFDM symbol (N_{DBPS})
6	BPSK	1/2	1	48	24
9	BPSK	3/4	1	48	36
12	QPSK	1/2	2	96	48
18	QPSK	3/4	2	96	72
24	16-QAM	1/2	4	192	96
36	16-QAM	3/4	4	192	144
48	64-QAM	2/3	6	288	192
54	64-QAM	3/4	6	288	216

Parameter	Value
N_{SD}: Number of data subcarriers	48
N_{SP}: Number of pilot subcarriers	4
N_{ST}: Number of subcarriers, total	52 ($N_{SD} + N_{SP}$)
Δ_F: Subcarrier frequency spacing	0.3125 MHz (=20 MHz/64)
T_{FFT}: IFFT/FFT period	3.2 μs ($1/\Delta_F$)
$T_{PREAMBLE}$: PLCP preamble duration	16 μs ($T_{SHORT} + T_{LONG}$)
T_{SIGNAL}: Duration of the SIGNAL BPSK-OFDM symbol	4.0 μs ($T_{GI} + T_{FFT}$)
T_{GI}: GI duration	0.8 μs ($T_{FFT}/4$)
T_{GI2}: Training symbol GI duration	1.6 μs ($T_{FFT}/2$)
T_{SYM}: Symbol interval	4 μs ($T_{GI} + T_{FFT}$)
T_{SHORT}: Short training sequence duration	8 μs ($10 \times T_{FFT}/4$)
T_{LONG}: Long training sequence duration	8 μs ($T_{GI2} + 2 \times T_{FFT}$)