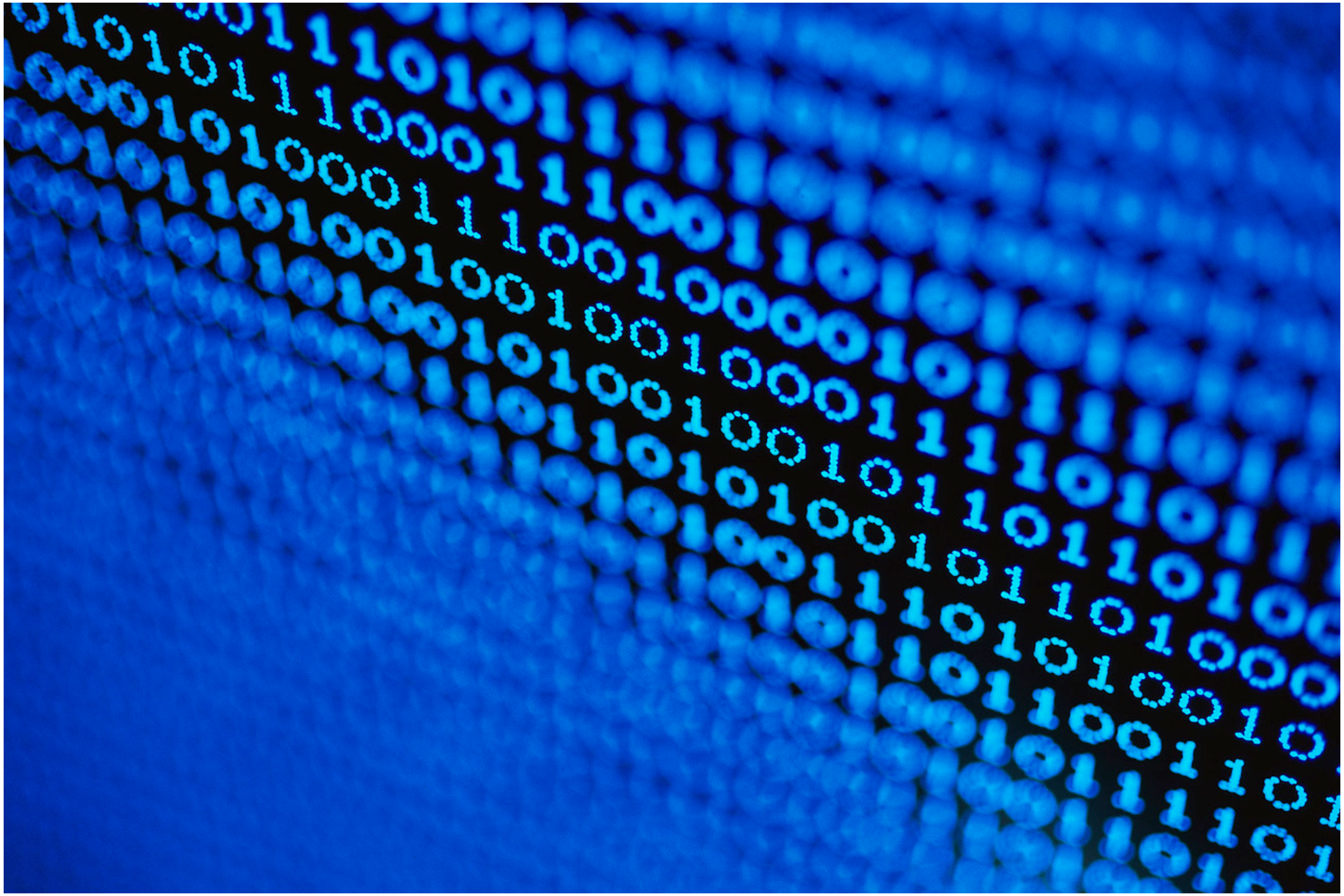
Représenter des entiers en binaire



GIF-1001 Ordinateurs : Structure et Applications

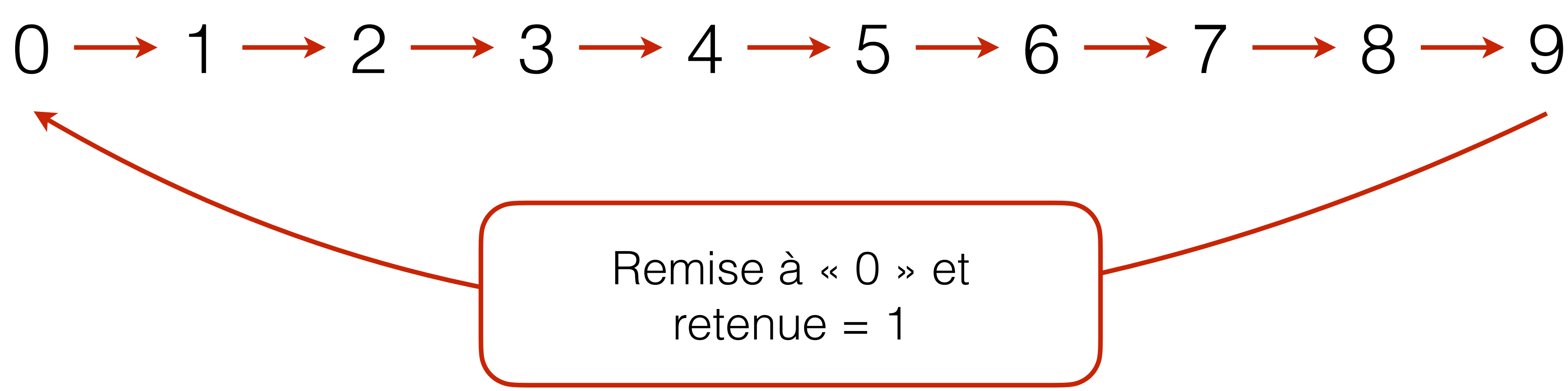
Jean-François Lalonde

Représentation des entiers

- Chaque nombre doit avoir une représentation différente
    - 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14…
    - I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV…
- Pour se simplifier la vie, on utilise une représentation avec laquelle il est facile de compter
    - CMXCIX + XVI = ?

Compter en base 10 (décimal)

- 10 symboles: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
- Comptons: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, …?
- Que faire quand on n’a plus de symboles?
    - on recommence au début en ajoutant une retenue de 1 au prochain symbole



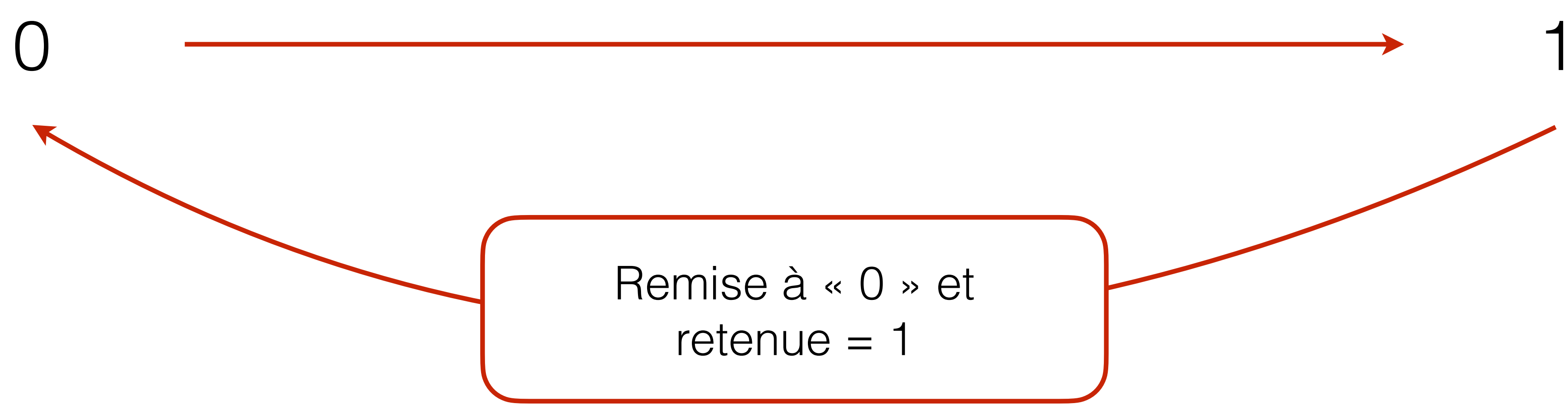
Compter en base 10 (décimal)

- Dans un nombre en base 10, chaque position correspond à une **puissance de 10**

Représentation décimale	Position 3	Position 2	Position 1	Position 0		
	1	4	2	3		
Valeur décimale	1×10^3 +	4×10^2 +	2×10^1 +	3×10^0	=	1423

Compter en base 2 (binaire)

- 2 symboles: « 0 » et « 1 »
- Comptons: 0, 1, …?
- Que faire quand on n'a plus de symboles?
  - on recommence au début en ajoutant une retenue de 1 au prochain symbole



Compter en base 2 (binaire)

- Dans un nombre en base 2, chaque position correspond à une **puissance de 2**

	Position 3	Position 2	Position 1	Position 0		
Représentation décimale	1	0	1	1		
Valeur décimale	1×2^3 +	0×2^2 +	1×2^1 +	1×2^0	=	11

Compter en base 2 (binaire)

- Dans un nombre en base 2, chaque position correspond à une **puissance de 2**

	Position 3	Position 2	Position 1	Position 0		
Représentation décimale	1	0	1	1		
Valeur décimale	1×2^3 +	0×2^2 +	1×2^1 +	1×2^0	=	11

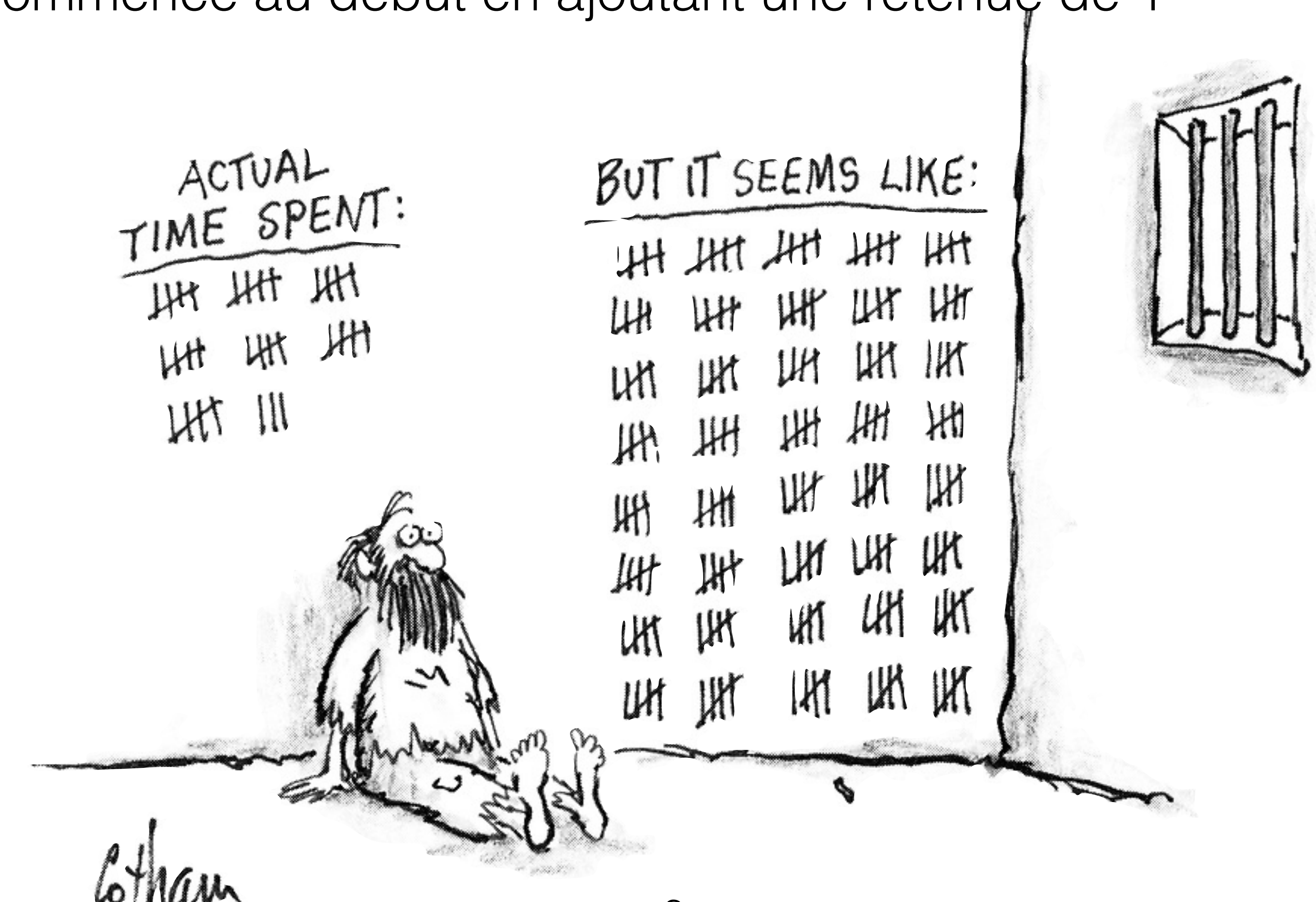
bit le **plus** significatif (il vaut 2^3)

bit le **moins** significatif (il vaut 2^0)

- Chaque symbole est nommé «bit».

(détour): compter en base 1

- 1 symbole: 1
- Comptons: (rien), 1, …
- Que faire quand on n’a plus de symboles?
  - On recommence au début en ajoutant une retenue de 1



(détour): compter en base 1

- Dans un nombre en base 1, chaque position correspond à une **puissance de 1 (donc 1)**

	Position 3	Position 2	Position 1	Position 0		
Représentation décimale	1	1	1	1		
Valeur décimale	1×1^3 +	1×1^2 +	1×1^1 +	1×1^0	=	4

Récapitulation

- Pour représenter un nombre entier, nous sommes familiers avec la notation décimale, mais plusieurs options sont possibles.

- Il faut définir:

Base	Symboles	
1	1	
2	0 et 1	(binaire)
10	0 à 9	(décimal)

Combien de nombres différents peut-on générer?

- Décimal
  - 2 symboles?
  - 3 symboles?
- Binaire
  - 4 symboles (bits)?
  - 8 symboles (bits)?
  - 16 symboles (bits)?

Combien de nombres différents peut-on générer?

- Décimal
  - 2 symboles? ➢ 00 à 99 = 10^2 = 100
  - 3 symboles? ➢ 000 à 999 = 10^3 = 1000
- Binaire
  - 4 symboles (bits)? ➢ 0000 à 1111 = 2^4 = 16
  - 8 symboles (bits)? ➢ 00000000 à 11111111 = 2^8 = 256
  - 16 symboles (bits)? ➢ 0000… à 1111… = 2^{16} = 65536

4 PHIR™

(**P**oint **H**yper **I**mportants à **R**etenir)

Image source

PHIR™ #1

- Dans un ordinateur, **tout, absolument tout**, est stocké en format binaire
  - entiers naturels (strictement positifs): $\mathbb{N}$
  - entiers relatifs (positifs et négatifs): $\mathbb{Z}$
  - réels (avec précision limitée): $\mathbb{R}$
  - chaîne de caractères: Bonjour!
  - programmes: `while (true) {printf(“Hello world!”);}`
  - images:
  
  - vidéos
  - twitter
  - facebook
- Bref, **tout**!

image

PHIR™ #2

- Dans un ordinateur, on utilise un nombre **fini** de bits pour représenter de l'information.
- Ce nombre doit toujours être **pré-déterminé**, donné à l'avance par quelqu'un (le prof, le programmeur, un standard, etc…)
  - Exemple (par la programmeuse)

```c
int toto = 2;
```

    - Le « `int` » indique (la plupart du temps) un entier relatif sur 32 bits
  - Exemple (par le prof)
    - Convertissez 9 en binaire **sur 8 bits** ➛ 00001001
  - Exemple (par le standard IEEE754)
    - L'exposant est stocké avec 8 bits.

Qu'est-ce que l'IEEE754?
Réponse au prochain cours…

Nombre de bits

- En *théorie*, on pourrait utiliser le nombre de bits que l'on veut: 7, 13, 42, etc.
- En *pratique*, certains nombres sont plus communs:
  - 1 bit : 2 valeurs (0 et 1)
  - 4 bits: 16 valeurs (0 à 15)
  - 8 bits: 256 valeurs (0 à 255)
    - aussi appelé *octet*, ou, en anglais, *byte*
  - 16 bits: 65 536 valeurs (0 à 65 535)

Bits vs octets

8 bits = 1 octet (*byte*)

- Combien de valeurs peut-on représenter avec 1 octet?
  - 1 octet = 8 bits = 2^8 valeurs = 256
- Multiples d'octets:

« o » est l'abbréviation d'octet

  - 1 Kilo-octet (1 Ko) = 2^{10} o = 1024 o = 8 192 bits
  - 1 Mega-octet (1 Mo) = 2^{10} Ko = 2^{20} o = 8 388 608 bits
  - 1 Giga-octet (1 Go) = 2^{10} Mo = 2^{20} Ko = 2^{30} o = 8 589 934 592 bits
  - 1 Tera-octet (1 To) = 2^{10} Go = 2^{20} Mo = 2^{30} Ko = 2^{40} o = …
  - 1 Peta-octet (1 Po) = 2^{10} To = 2^{20} Go = 2^{30} Mo = 2^{40} Ko = 2^{50} o = …

1 kilo-octet… 1000 ou 1024 octets?

Dans le cours

1 Kilo-octet (1 Ko) = 2^{10} o = 1024 o

Sur wikipedia

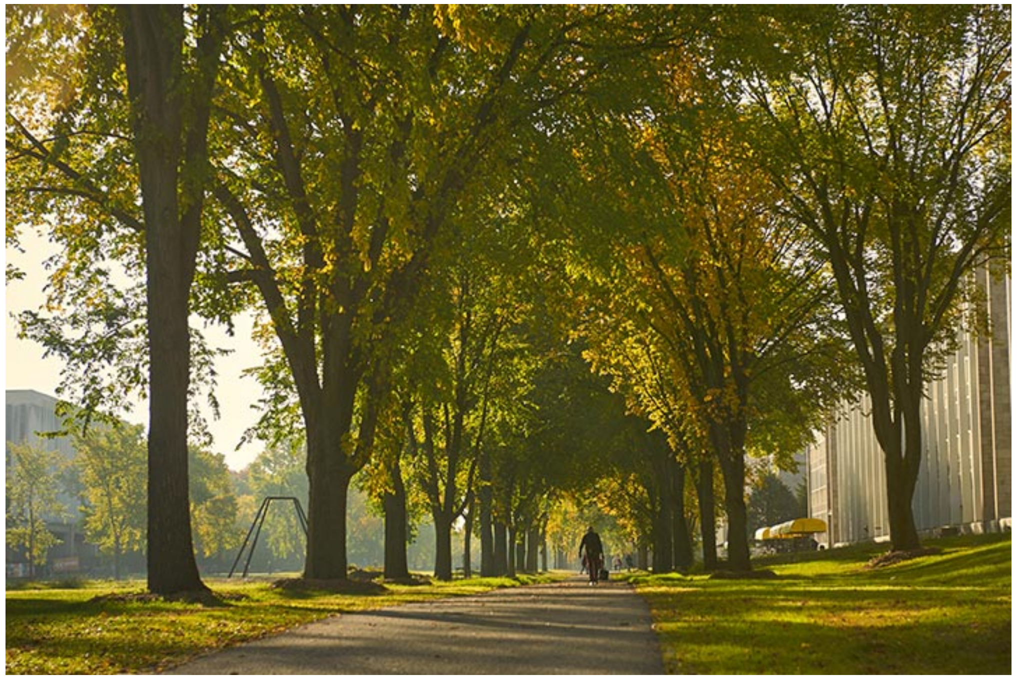
The International System of Units (SI) defines the prefix *kilo* as 1000 (10^3); per this definition, one kilobyte is 1000 bytes.[1]

Source

Au Québec…

« Ma piscine est à 80 »

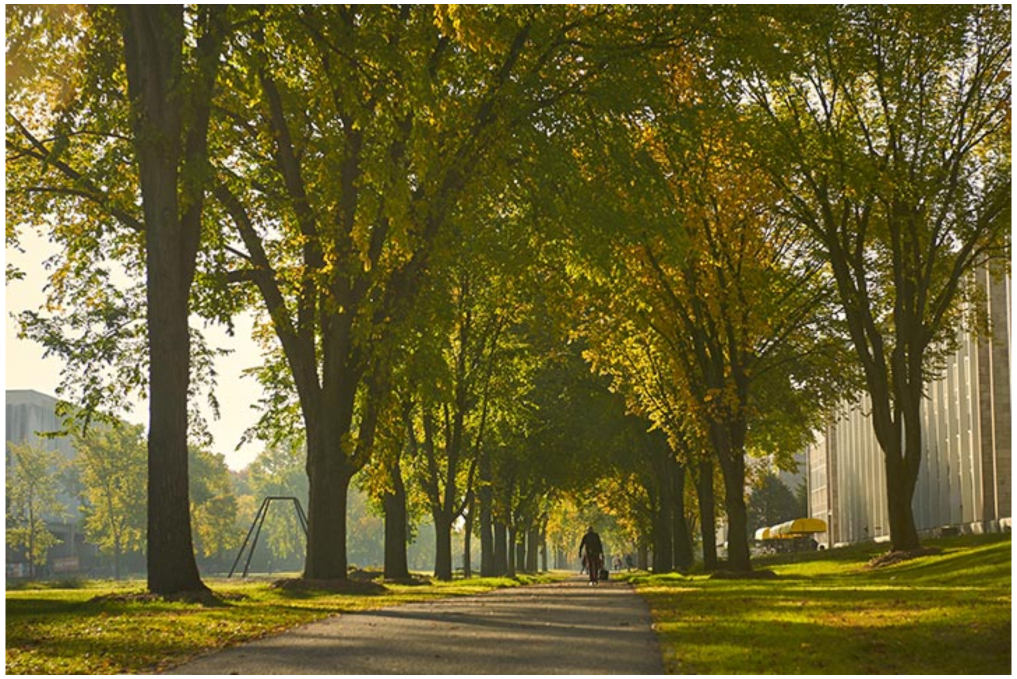
« Il fait 25 dehors »



Au Québec…

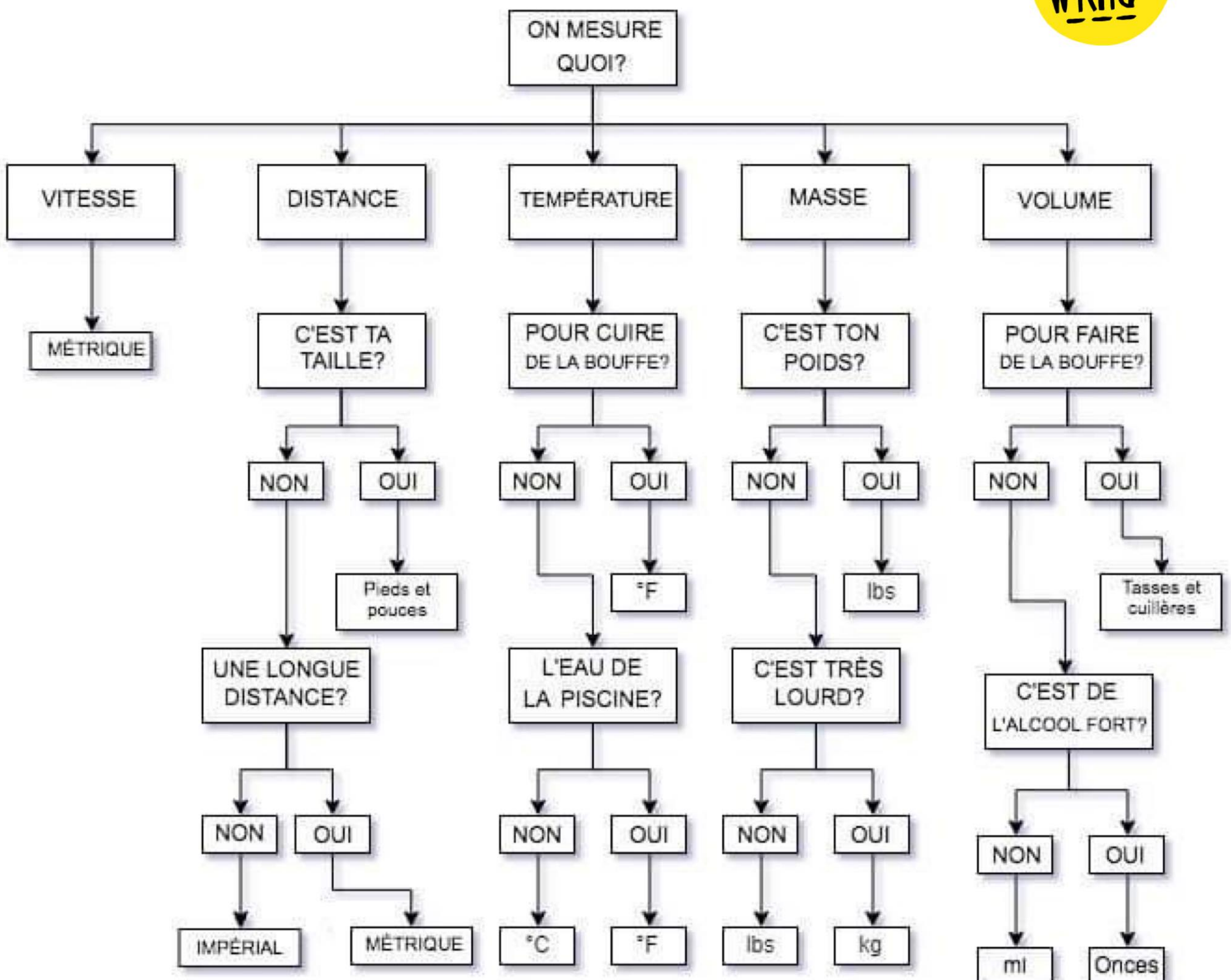
« Ma piscine est à 25 »

« Il fait 80 dehors »

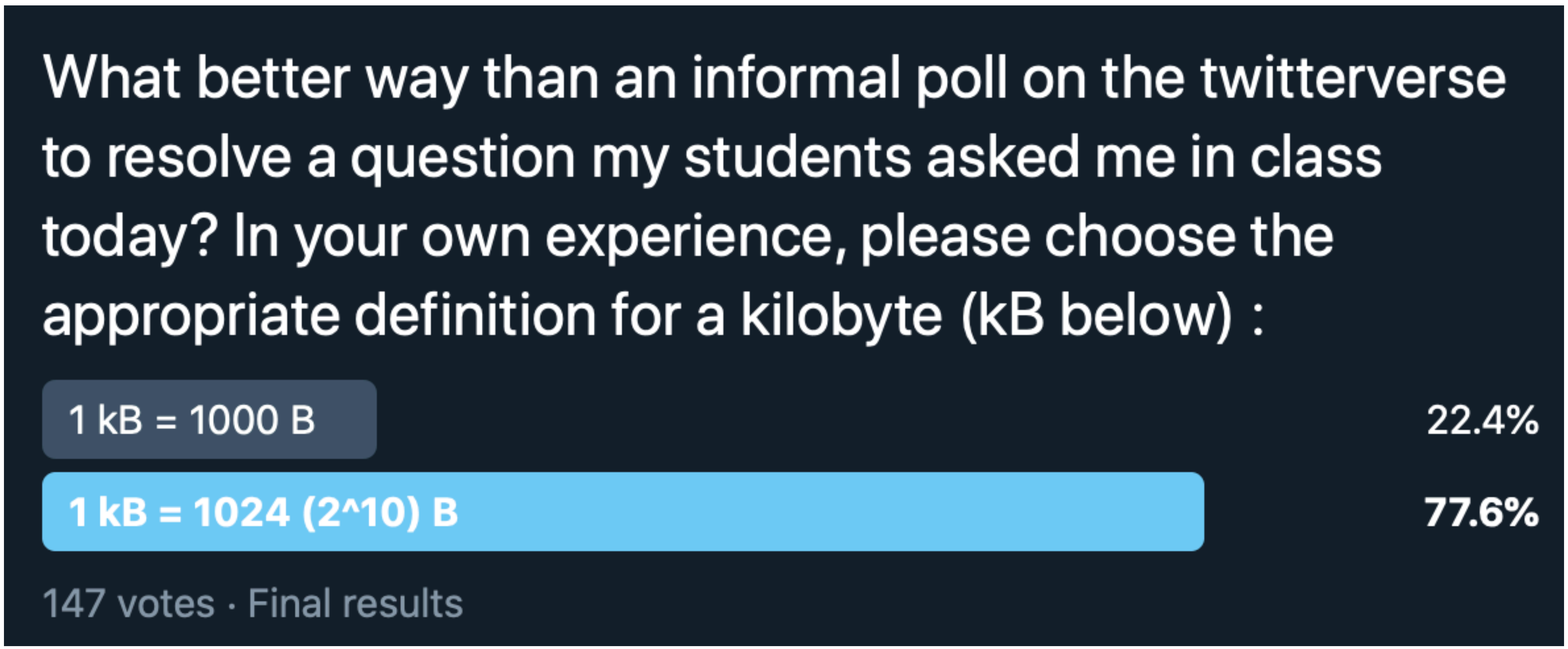


Aide-mémoire

MESURER COMME UN QUÉBÉCOIS



Preuve : twitter



Source
https://twitter.com/jflalondeqc/status/1308189082112192519

1 Kilo-octet (1 Ko) = 2^{10} o = 1024 o

Conventions d'écriture

- Comment différencier
    - 1111 (binaire),
    - et 1111 (décimal)?

dans le cours nous privilégierons le préfixe 0b

- Binaire: on utilise le préfixe « 0b » ou l'indice « b ». Ex:
    - $0b1111 = 1111_b = 15$
- Décimal: aucune notation particulière.

Représentation des entiers

Entiers non-signés

positifs (ou nuls)

0, 1, 2, …

entiers naturels ($\mathbb{N}$)

Entiers signés

positifs ou négatifs

… -2, -1, 0, 1, 2, …

entiers relatifs ($\mathbb{Z}$)

Représentation des entiers

Entiers non-signés	Entiers signés
positifs (ou nuls)	positifs ou négatifs
0, 1, 2, …	… -2, -1, 0, 1, 2, …
entiers naturels ($\mathbb{N}$)	entiers relatifs ($\mathbb{Z}$)

Conversion vers décimal

Entiers non-signés

- binaire ➞ décimal
  - 0b10010101

Position	7	6	5	4	3	2	1	0
Bit	1	0	0	1	0	1	0	1
Valeur	128	64	32	16	8	4	2	1
=	128	0	0	16	0	4	0	1

= 149

Entiers non-signés

Conversion vers décimal

- binaire ➙ décimal
  - 0b10010101

Position	7	6	5	4	3	2	1	0
Bit	1	0	0	1	0	1	0	1
Valeur	128	64	32	16	8	4	2	1
=	128	0	0	16	0	4	0	1

= 149

  - 0b11001011

Conversion vers décimal

- binaire ➝ décimal
  - 0b10010101

Position	7	6	5	4	3	2	1	0
Bit	1	0	0	1	0	1	0	1
Valeur	128	64	32	16	8	4	2	1
=	128	0	0	16	0	4	0	1

= 149

  - 0b11001011

Position	7	6	5	4	3	2	1	0
Bit	1	1	0	0	1	0	1	1
Valeur	128	64	32	16	8	4	2	1
=								

Conversion vers décimal

Entiers non-signés

- binaire ➙ décimal
  - 0b10010101

Position	7	6	5	4	3	2	1	0
Bit	1	0	0	1	0	1	0	1
Valeur	128	64	32	16	8	4	2	1
=	128	0	0	16	0	4	0	1

= 149

  - 0b11001011

Position	7	6	5	4	3	2	1	0
Bit	1	1	0	0	1	0	1	1
Valeur	128	64	32	16	8	4	2	1
=	128	64	0	0	8	0	2	1

= 203

Conversion: décimal ➙ binaire (approche 1)

- 10 = 0b?

10	2		
-10	5	2	
0	-4	2	2
	1	-2	**1**
		0	

- 10 = 0b1010

Selon moi, cette approche est plus simple, mais utilisez votre préférée!

Conversion: décimal ➝ binaire (approche 2)

Position	7	6	5	4	3	2	1	0
Valeur	128	64	32	16	8	4	2	1

- 10 en binaire sur 8 bits?

Selon moi, cette approche est plus simple, mais utilisez votre préférée!

Conversion: décimal → binaire (approche 2)

Position	7	6	5	4	3	2	1	0
Valeur	128	64	32	16	8	4	2	1

- 10 en binaire sur 8 bits?
  - commencer de la gauche: 0 x 128, 0 x 64, …

Bits	0	0	0	0				

  - 1 x 8. On met un “1” à la position 3. Reste 2

Bits	0	0	0	0	1			

    - 0 x 4

Bits	0	0	0	0	1	0		

    - 1 x 2. On met un “1” à la position 1. Reste 0. Terminé!

Bits	0	0	0	0	1	0	1	0

Conversion: décimal ➝ binaire (approche 2)

Position	7	6	5	4	3	2	1	0
Valeur	128	64	32	16	8	4	2	1

- 147 en binaire sur 8 bits?

Conversion: décimal ➝ binaire (approche 2)

Position	7	6	5	4	3	2	1	0
Valeur	128	64	32	16	8	4	2	1

- 147 en binaire sur 8 bits?
  - commencer de la gauche: 1 x 128. Reste 19

Bits	1							

- 0 x 64, 0 x 32, 1 x 16. Reste 3

Bits	1	0	0	1				

- 0 x 8, 0 x 4, 1 x 2. Reste 1

Bits	1	0	0	1	0	0	1	

- 1 x 1. Terminé!

Bits	1	0	0	1	0	0	1	1

Addition en binaire

Cas simples

$$
\begin{array}{rr} & 0 \\ + & 0 \\ \hline & 0 \end{array}
\qquad
\begin{array}{rr} & 0 \\ + & 1 \\ \hline & 1 \end{array}
\qquad
\begin{array}{rr} & 1 \\ + & 0 \\ \hline & 1 \end{array}
\qquad
\begin{array}{rr} & 1 \\ + & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}
$$

dépassements

Cas à plusieurs bits

retenues

$$
\begin{array}{rrrr} & & & \\ & 1 & 1 & 0 \\ + & 0 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 \end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrr} & & 1 & & \\ & 1 & 0 & 1 & 0 \\ + & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrrrrr} 1 & 1 & & & & & & \\ & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ + & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}
$$

Représentation des entiers

Entiers non-signés

positifs (ou nuls)

0, 1, 2, …

entiers naturels ($\mathbb{N}$)

Entiers signés

positifs ou négatifs

… -2, -1, 0, 1, 2, …

entiers relatifs ($\mathbb{Z}$)

Représentation des entiers

Entiers non-signés	**Entiers signés**
positifs (ou nuls)	positifs ou négatifs
0, 1, 2, …	… -2, -1, 0, 1, 2, …
entiers naturels ($\mathbb{N}$)	entiers relatifs ($\mathbb{Z}$)

Nombres entiers signés

- Premier essai: représentation « signe et magnitude »
  - Le premier bit (à gauche) est le **signe**: 0 = positif, 1 = négatif
  - Le reste est la **magnitude**
  - Exemple (4 bits): $1101_b = (-1) \times (4 + 1) = -5$
  - Combien de nombres peut-on représenter?

Nombres entiers signés

- Problèmes?
  - Représentation de 0?
    - $0 = 0000_b = 1000_b$
  - Opérations arithmétiques:
    - $-3 + 4 = 1011_b + 0100_b = 1111_b = -7$!

Représentation « complément 2 »

Entiers signés

- Seule différence: le premier bit représente -2^{N-1}

« N » est le nombre de bits

- Exemple: $1101_b = ?$
  - $1101_b = -2^3 + 2^2 + 2^0 = -3$.

Représentation « complément 2 »

Entiers signés

- Seule différence: le premier bit représente -2^{N-1}

« N » est le nombre de bits

- Exemple: $1101_b = ?$
  - $1101_b = -2^3 + 2^2 + 2^0 = -3$.
- Pour changer le signe d'un nombre, il faut:
  - le soustraire de 2^N (d'où le nom « complément 2 »)
  - plus direct (et plus facile): inverser tous les bits et ajouter 1.

Représentation « complément 2 »

Entiers signés

- Seule différence: le premier bit représente -2^{N-1}

« N » est le nombre de bits

- Exemple: 1101_b = ?
  - $1101_b = -2^3 + 2^2 + 2^0 = -3$.
- Pour changer le signe d'un nombre, il faut:
  - le soustraire de 2^N (d'où le nom « complément 2 »)
  - plus direct (et plus facile): inverser tous les bits et ajouter 1.
- Exemple: $3 = 0011_b$. $-3 = ?_b$
  - Si on prend le complément + 1, on obtient: $1100_b + 1_b = 1101_b$.

Représentation « complément 2 »

Entiers signés

- Combien de nombres peut-on représenter?

Représentation « complément 2 »

- Problèmes de tout à l'heure?
  - Représentation de 0?
    - 0000_b seulement (maintenant, $1000_b = -8_d$)
  - Opérations arithmétiques:
    - $-3 + 4 = 1101_b + 0100_b = 0001_b = 1$ (ouf!)

Représentation « complément 2 »

- Et la soustraction?
    - En pratique, on peut soustraire avec une addition avec l'inverse (en complément 2).
    - Par ex.: 2 - 3 = 2 + (-3) = -1.

Nous utiliserons **toujours** le « complément 2 » pour représenter les entiers signés.

Cela est valable pour le cours, mais en pratique également!

Non-signé vs signé

- Non-signé
  - 0b11001011

Position	7	6	5	4	3	2	1	0
Bit	1	1	0	0	1	0	1	1
Valeur	128	64	32	16	8	4	2	1
=	128	64	0	0	8	0	2	1

= 203

Entiers non-signés

- Signé (complément 2)
  - 0b11001011

Position	7	6	5	4	3	2	1	0
Bit	1	1	0	0	1	0	1	1
Valeur	-128	64	32	16	8	4	2	1
=	-128	64	0	0	8	0	2	1

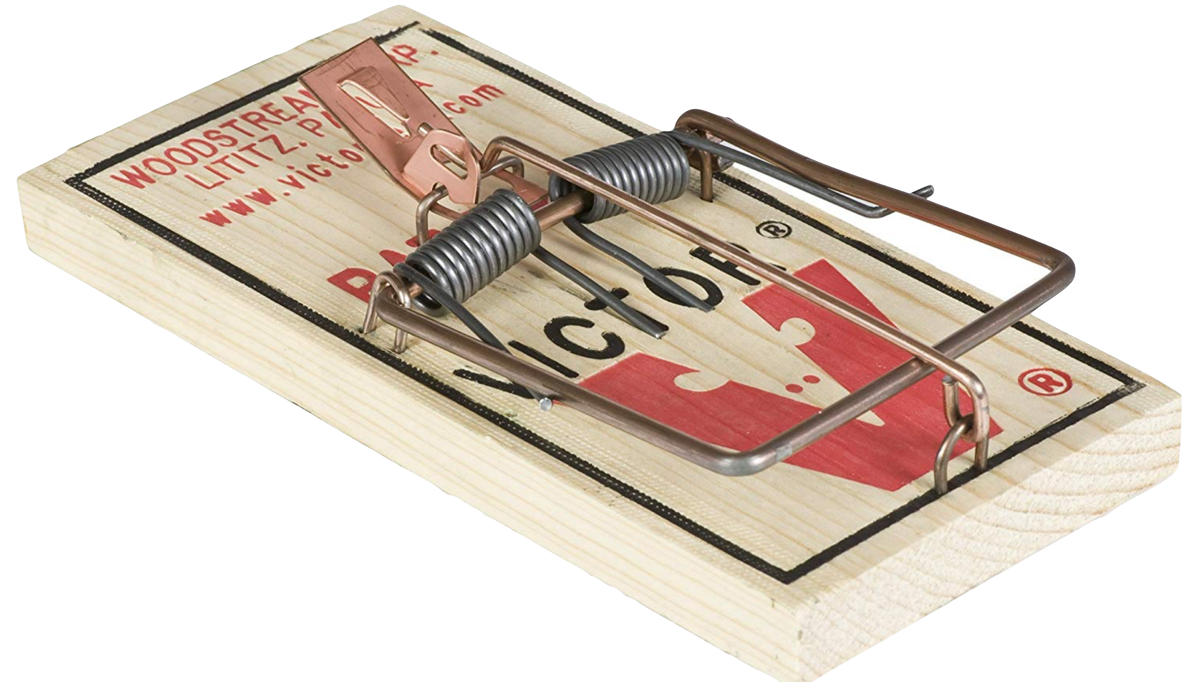
= -53

Entiers signés

Non-signé vs signé

	Entiers non-signés (positifs ou nuls)	Entiers signés (positifs ou négatifs)
Seule différence: Bit le plus significatif (le plus à gauche)	2^{N-1}	-2^{N-1}

Question (piège)



Quelle est la valeur décimale de 0b1010?

PHIR™ #3

- A priori, **nous ne pouvons pas savoir** ce qu'une chaîne binaire signifie.
  - Ex: quelle est la valeur décimale de 0b1010?
  - La bonne réponse est: ça dépend!

positifs (ou nuls)

entier non-signé	10
entier signé	-6

positifs ou négatifs

  - Il faut donc savoir **quel format utiliser** pour bien interpréter les données

Cas spécial 1: débordement (« overflow »)

- Quels nombres peut-on représenter sur 4 bits en complément 2?
  - -8 à +7
- Qu'arrive-t-il si on additionne (sur 4 bits)
  - 5 + 4 = ?
  - on obtient -7!
- Comment faire pour détecter un débordement?
  - le bit de signe change

Cas spécial 2: retenue (« carry »)

- Condition: s'il y a une retenue qui « dépasse » des bits les plus significatifs
- Utile pour l'arithmétique *non-signée* (pas important pour l'arithmétique signée)
- Ex: additionner 10+7 sur 4 bits