

GEL10280: Communications numériques 2009 Examen Partiel

*Vendredi le 27 février 2008; Durée: 10h30 à 12h20
Deux feuilles de documentation fournies; une calculatrice permise*

Problème 1 (10 points) *Module 2*

Supposons que nous utilisons OOK et qu'il y a de l'interférence inter-symbole. Les taux d'erreur binaire pour les quatre patrons 00, 01, 10 et 11 sont:

$$P_{00} \ P_{01} \ P_{10} \ P_{11}.$$

- A. (5 points) Laquelle(s) des quatre probabilités risque d'être la(les) plus grande(s)? Pourquoi?
- B. (5 points) Laquelle(s) des quatre probabilités risque d'être la(les) plus petite(s)? Pourquoi?

Indice : Vous devrez focaliser votre attention aux erreurs lors de la détection de deuxième bit dans le patron, c.-à-d. la probabilité **que le deuxième bit excédera le seuil de détection.**

Problème 2 (20 points) *Module 3*

Dans tout système de communications numériques un compromis est fait entre BER vs. E_b/N_0 , efficacité spectrale, et complexité (coûts).

- A. (10 points) En choisissent entre DPSK et BPSK, quels sont les compromis?
- B. (10 points) En choisissent entre 16PSK et 16QAM, quels sont les compromis?

Pour les deux modulations proposées pour chaque énoncé, discuter leurs performances relatives vis-à-vis 1) BER vs. E_b/N_0 , 2) efficacité spectrale, et 3) complexité (coûts) pour démontre votre compréhension en profondeur de ces modulations.

Problème 3 (20 points) Module 3

- A. (10 points) Pour la détection cohérente et les impulsions de Nyquist idéales, donnez l'efficacité spectrale (en b/s/Hz) pour les deux constellations suivantes en supposant un taux binaire de 800 kb/s.

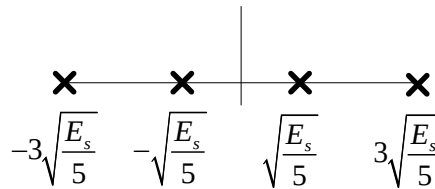
$$s_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \sqrt{E_s}$$

$$s_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 0] \sqrt{E_s}$$

$$s_3 = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \sqrt{E_s}$$

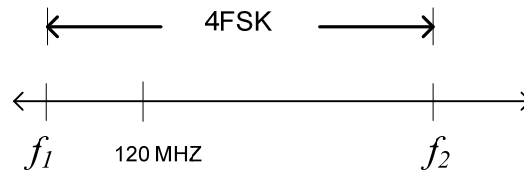
$$s_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 1] \sqrt{E_s}$$

4FSK



4PAM

- B. (10 points) Donnez la plage de fréquence pour 4FSK, en supposant que le premier canal est centre à 120 MHz, soit les valeurs de f_1 et f_2 .

**Problème 4 (20 points) Module 3**

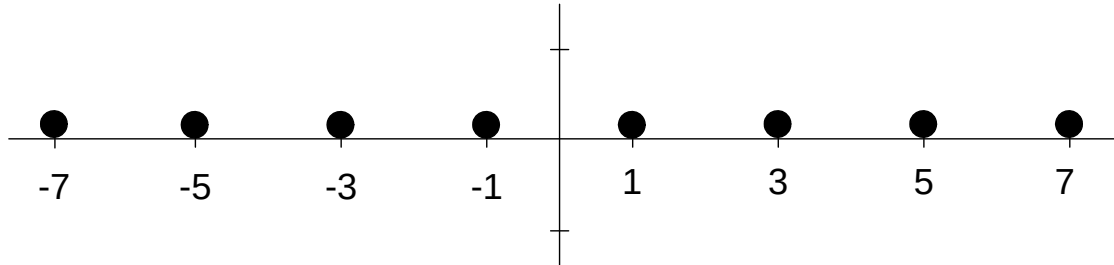
Considérez le graphique du « Plan de l'efficacité spectrale ».

J'ai créé un nouveau système de modulation LAR qui est aussi efficace spatialement que le QAM. La perte de 8LAR par rapport à QPSK est 4 dB, et la perte de 16LAR par rapport à QPSK est 9 dB.

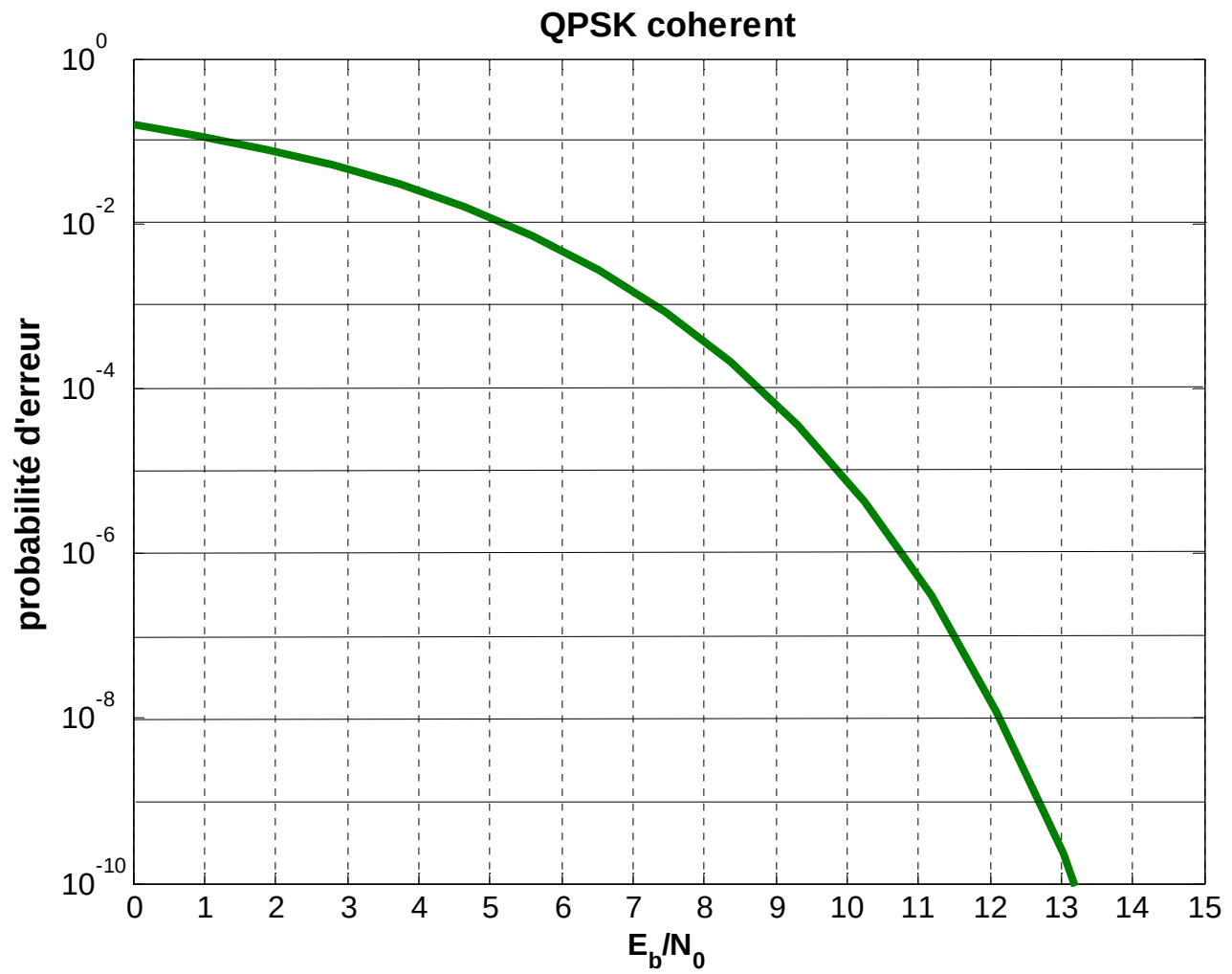
Trouvez les coordonnées de 8LAR et 16LAR pour le graphique du « Plan de l'efficacité spectrale ».

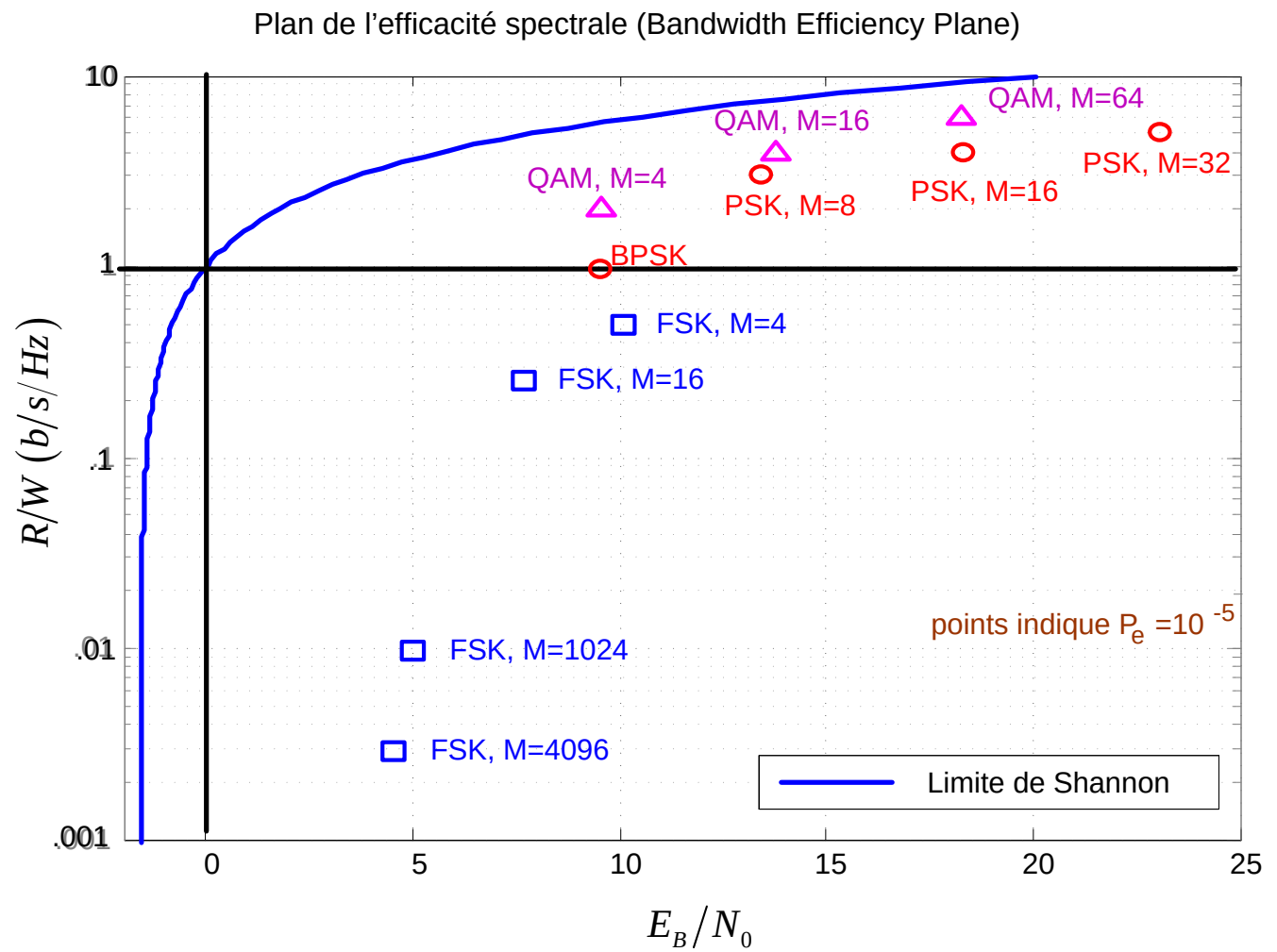
Problème 5 (30 points) *Module 3*

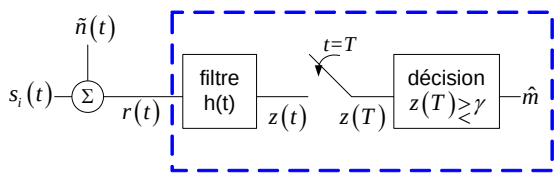
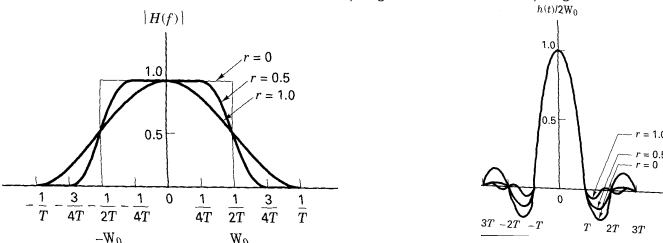
Voici un graphique de l'espace I/Q pour 8PAM.



- A. (10 points) Quelles sont les coordonnées (en fonction de E_s , l'énergie moyenne par symbole) de 8PAM dans l'espace du signal?
- B. (10 points) Trouvez la distance minimale (D_{min}) pour 8PAM en fonction de E_s , l'énergie moyenne par symbole.
- C. (5 points) Trouvez la probabilité d'erreur en fonction de E_b/N_0 pour 8PAM en utilisant l'estimé provenant de la borne de l'union.
- D. (5 points) Trouvez la perte en dB par rapport au QPSK pour 8PAM.

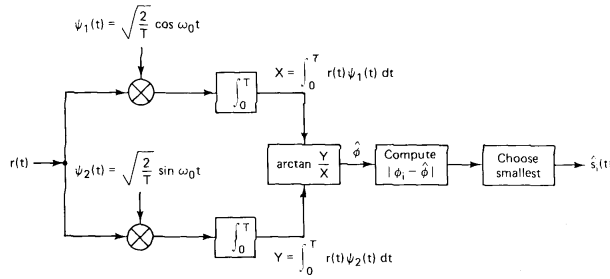




Récepteur d'échantillonnage 	MAP: i qui maximise $p(z s_i) p(s_i)$ i qui minimise $\ \mathbf{r} - \mathbf{s}_i\ ^2 - N_0 \ln P(\mathbf{s}_i)$ $P(\mathbf{s}_i)$ = probabilité a priori de symbole $\mathbf{s}_i$ ML: i qui maximise $p(z s_i)$ i qui minimise $\ \mathbf{r} - \mathbf{s}_i\ ^2$
Raised cosine $v(t) = \frac{\sin(\pi t/T_s) \cos(r\pi t/T_s)}{\pi t/T_s} \frac{1}{1 - 4r^2 t^2/T_s^2}$ 	Énergie moyenne $E_{\text{moy}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \ \mathbf{s}_i\ ^2$ $= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M [\text{énergie du signal } i]$ Énergie par bit v. énergie par symbole $E_b \log_2 M = E_s$
QAM $\eta = \log_2 M$ Conversion de l'espace I/Q vers espace du signal $(\tilde{a}_n^I, \tilde{a}_n^Q) = \sqrt{\frac{M \cdot E_s}{\sum_{i=1}^M [(a_n^I)^2 + (a_n^Q)^2]}} (a_n^I, a_n^Q)$ coordonnées, espace du signal (pointing to $\tilde{a}_n^I, \tilde{a}_n^Q$) coordonnées, espace I/Q (pointing to a_n^I, a_n^Q) cas rectangulaire (carrée) $M=L^2$ $P_e = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q \left(\sqrt{\frac{3 \log_2 M}{(M-1)}} \frac{E_b}{N_0} \right) \quad d_{\min} = \sqrt{\frac{6 \log_2 L}{L^2 - 1}}$	Borne d'union $P_e \approx \frac{2K}{M} Q \left(\frac{D_{\min}}{\sqrt{2N_0}} \right) = \frac{2K}{M} Q \left(d_{\min} \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$ K est le nombre des paires des signaux séparés par la distance minimale $D_{\min}$ Distance minimale dans l'espace du signal $D_{\min} = \min_{i \neq k} \ \mathbf{s}_i - \mathbf{s}_k\ \quad \text{et} \quad d_{\min} = \frac{D_{\min}}{\sqrt{2E_b}}$
$P_e(\text{BPSK}) = Q \left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right)$ $P_e(\text{OOK}) = Q \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$ $P_e(\text{QPSK}) \approx 2Q \left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right)$ Perte par rapport à QPSK $d_{\min} = \sqrt{x} \sqrt{2} \quad \text{perte} = -10 \log_{10} x$	Pour une modulation orthogonale $P_e(\text{bit}) = P_b = P_e(\text{symbol}) \frac{M/2}{M-1}$ Pour une modulation non-orthogonale avec codage de gray $P_e(\text{bit}) = P_b = \frac{P_e(\text{symbol})}{\log_2 M}$ Efficacité spectrale $\eta = \frac{R_b}{W} = \frac{1}{T_b} \frac{1}{W} \text{ bits/s}$

MPSK cohérent

$$\eta = \log_2 M^\dagger$$

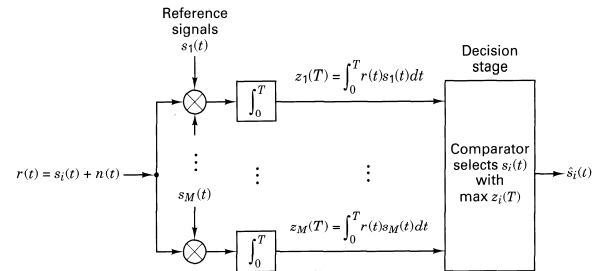


$$P_e(M) \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \sin \frac{\pi}{M}\right)$$

$$= 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b \log_2 M}{N_0}} \sin \frac{\pi}{M}\right)$$

MFSK cohérent

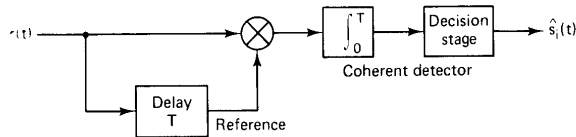
$$\eta = \frac{2 \log_2 M}{M+1}^\dagger$$



$$P_e = (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_b \log_2 M}{N_0}}\right)$$

Séparation minimale $1/2T_s$ **DPSK incohérent**

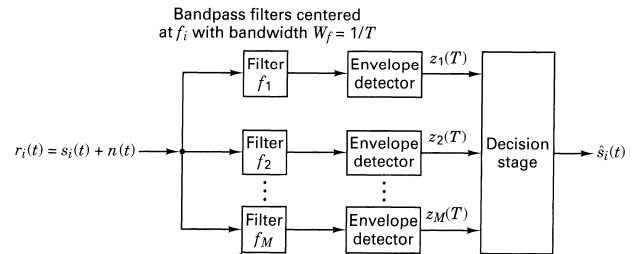
$$P_e = \frac{1}{2} e^{-E_b/N_0}$$



~1 dB de perte entre DPSK et BPSK

MFSK incohérent

$$\eta = \frac{\log_2 M}{M}^\dagger$$



$$P_e(BFSK) = \frac{1}{2} e^{-E_b/2N_0}$$

~1 dB de perte entre BFSK cohérente et incohérente

Séparation minimale $1/T_s$ **Loi de Shannon**

$$C = W \log_2(1 + SNR)$$

$$SNR = \frac{E_b}{N_0} \eta$$

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{W}{C} (2^{C/W} - 1) \quad \frac{C}{W} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} \rightarrow -1.6 \text{ dB}$$

Relations trigonométriques

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - \sin^2 \theta$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

Processus Gram Schmidt

$$\psi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{E_1}} s_1(t) \text{ où } E_1 \triangleq \int_0^T s_1^2(t) dt$$

$$\theta_2(t) \triangleq s_2(t) - \langle s_2(t), \psi_1(t) \rangle \psi_1(t)$$

$$E_2 \triangleq \int_0^T \theta_2^2(t) dt \quad \psi_2(t) = \frac{\theta_2(t)}{\sqrt{E_2}}$$

$$i. \quad \theta_i(t) = s_i(t) - \sum_{k=1}^{i-1} \langle s_i(t), \psi_k(t) \rangle \psi_k(t)$$

$$E_i \triangleq \int_0^T \theta_i^2(t) dt \quad \psi_i(t) = \frac{\theta_i(t)}{\sqrt{E_i}}$$

† en supposant une impulsion Nyquist idéale