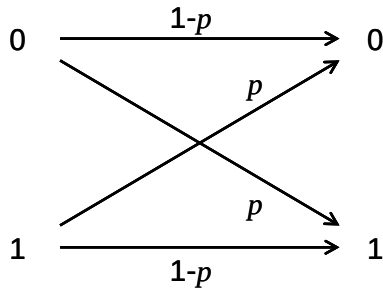


Corrélation croisée

$$z_{ij} \propto \int_0^T s_j(t) s_i(t) dt$$

Le canal binaire symétrique (BSC)

BPSK avec AWGN: $p = Q\left(\sqrt{2E_b/N_0}\right)$

Distance de Hamming

$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \#$ de positions de bits avec des valeurs différents dans les deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$

Distance minimale

$$\min_{i,j} d(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j) = \min_{j \geq 2} w(\mathbf{u}_j)$$

Probabilité d'erreur de bit p

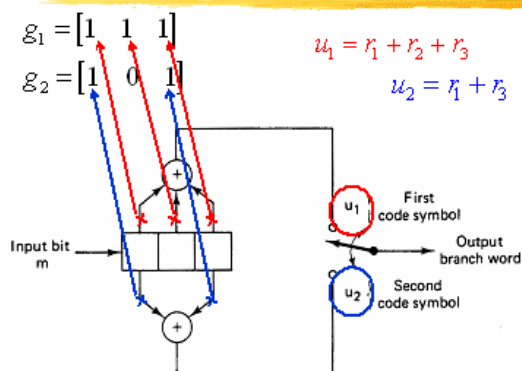
Probabilité d'avoir plus que t erreurs de bits
parmi un block de N bits

$$\sum_{k=t+1}^N \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \approx \binom{N}{t+1} p^{t+1} (1-p)^{N-t-1}$$

$$\binom{N}{k} \equiv \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

Codes convolutifs

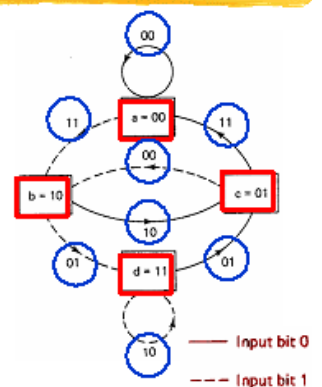
Exemple: $k=1, n=2, K=3$

**Diagramme de l'état**

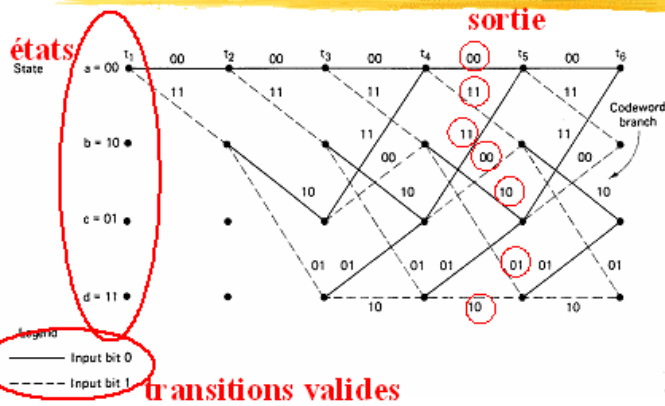
- Fixer les 2^{K-1} états
- Établir les transitions valides
- Générer les codes pour chaque transition

$$g_1 = [1 \ 1 \ 1]$$

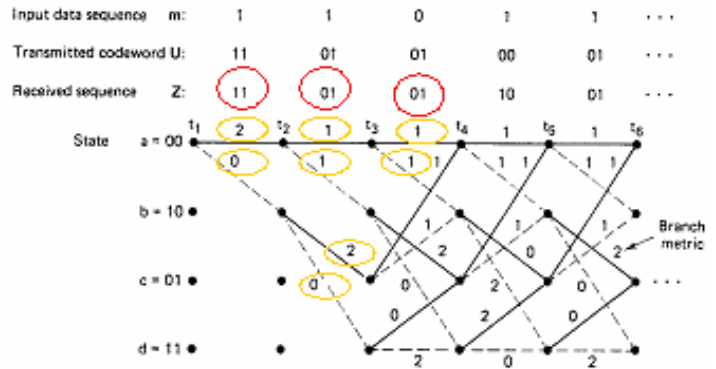
$$g_2 = [1 \ 0 \ 1]$$



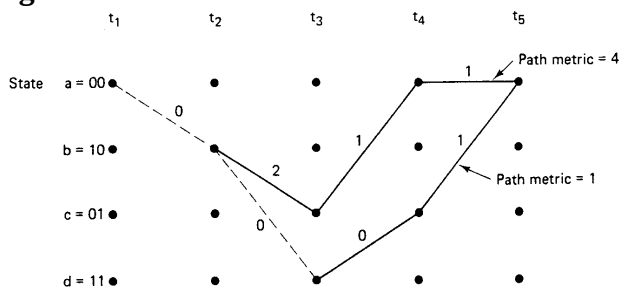
Treillis



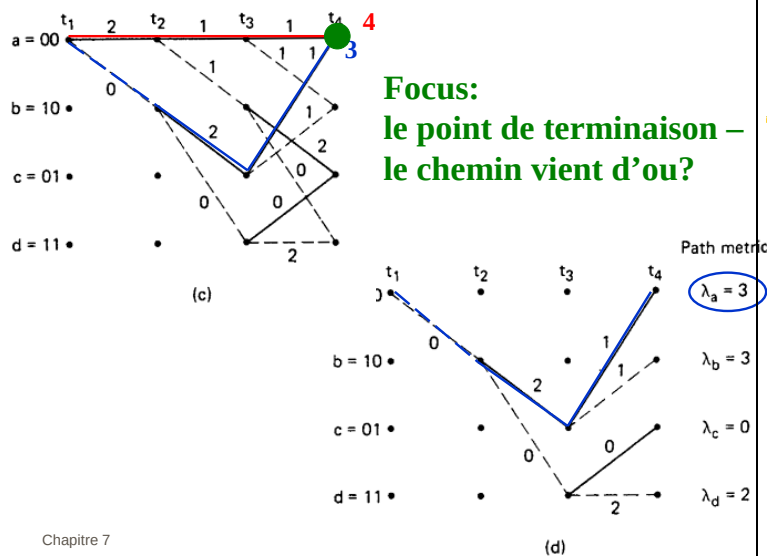
Algorithme de Viterbi



Algorithme de Viterbi



Algorithme de Viterbi



Deux métriques $dist(z_i, u_i)$

- Distance de Hamming
 - Pour les décisions fermes
 - $dist(z_i, u_i) = \# \text{ de bits différents}$
- Distance euclidienne
 - Pour les décisions souples
 - $dist(z_i, u_i) = z_i^T \cdot u_i = \sqrt{(z_{i,1} - u_{i,1})^2 + \dots + (z_{i,n} - u_{i,n})^2}$

Borne supérieur de gain de codage (en dB)

$$10 \log_{10} r d_f \quad r = \text{taux de codage} = k/n$$

Valeurs typiques

- Décisions
 - Ferme
 - Souples avec 3 bits de quantification
- Longueur de contrainte : $3 \leq K \leq 9$
- Taux de code : $r \geq 1/3$
- Chemin maximale : $h \leq 5K$

Distance libre = distance minimale = d_f

- Codes linéaires
 - distance équivalent à la distance entre la séquence de zéros et n'importe quelle autre séquence
- Procédure
 - Commence en état a
 - Finir en état a
 - Trajet le plus court $\Rightarrow$ longueur = distance libre

$t = \# \text{ d'erreurs qui peuvent être corrigés}$

$$t = \left\lfloor \frac{d_f - 1}{2} \right\rfloor$$

TCM

Taux de codage = $1/n$

➤ distance locale

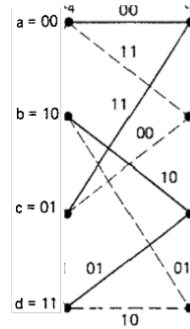
$$\text{dist}(u_i, v_i) = \sqrt{(u_{i,x} - v_{i,x})^2 + (u_{i,y} - v_{i,y})^2}$$

➤ Définition de la distance globale
(distance entre séquences,
ou *SED square Euclidean distance*)

$$\text{dist}^2(U, V) = \text{dist}^2(u_1, v_1) + \text{dist}^2(u_2, v_2) + \text{dist}^2(u_3, v_3) + \dots$$

*pour le TCM et
les décisions souples*

Exemple

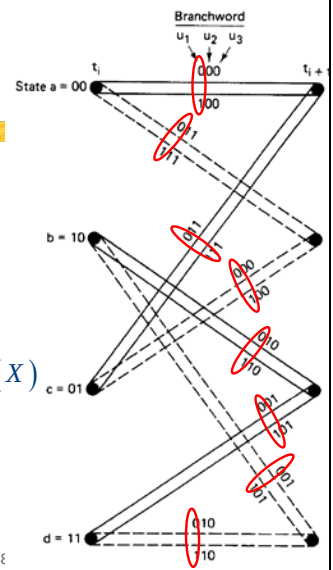


$u_1 = m_1$
(pas codé)

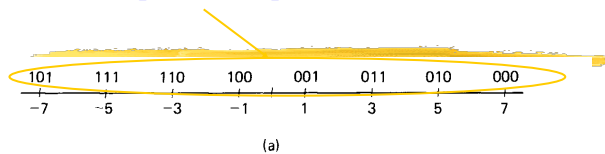
$u_2(X) = m_2(X)g_1(X)$
 $u_3 = m_2(X)g_2(X)$
codage convolutif

$$g_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

GEL10280/6448



Correspondence pour TCM



Correspondence de Gray

Chapitre 9

GEL10280/64486

10

Gain asymptotique

• Avec bonne normalisation

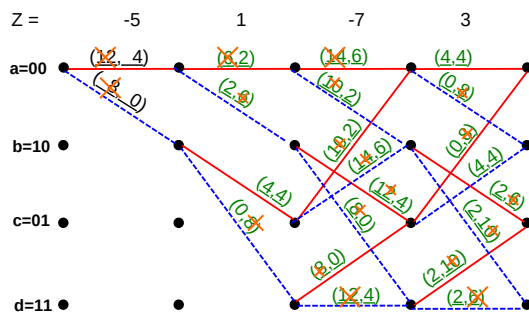
$$G \text{ (dB)} = 10 \log_{10} \left(\frac{d_f^2}{d_{\min}^2} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{6^2}{4.1^2} \right) = 3.3 \text{ dB}$$

Module 6

GEL4200/7014

46

Calculer les distances locales

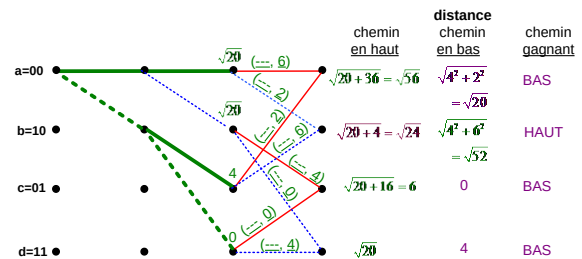


Chapitre 9

GEL10280/64486

22

Calculer les distances globales

 $t=3$ 

Chapitre 9

GEL10280/64486

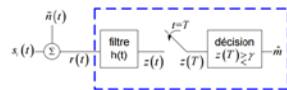
25

Récepteur ML

> Sans ISI

- examiner UN intervalle du symbole
- choisir le plus proche

i qui minimise $\|r - s_i\|^2$



> Avec ISI

- examiner une SÉQUENCE de symboles
- séquence aussi longue que le mémoire du canal

$\{i(k)\}_{k=-L}^0$ qui minimise $\sqrt{\|r(-LT) - s_{i(-L)}\|^2 + \dots + \|r(-kT) - s_{i(-k)}\|^2 + \dots + \|r(0) - s_{i(0)}\|^2}$

seule décision retenue

Critère zéro ISI

- > Entrée de l'égaliseur p_c (après le canal)
- > Sortie

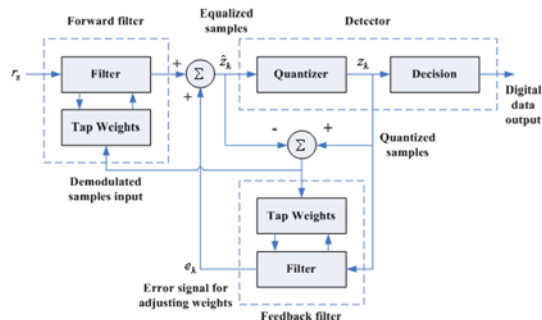
$$p_{eq}(t) = \sum_{n=-N}^N \alpha_n p_c(t - n\Delta)$$

- > Forcer zero ISI

$$p_{eq}(mT) = \sum_{n=-N}^N \alpha_n p_c[(m-n)T]$$

$$= \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$$

Egaliseur « decision feedback »



Chercher $\{\alpha\}$

$$[A] = [P_c]^{-1} [P_{eq}] = [P_c]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \text{middle column of } [P_c]^{-1}$$

Critère MMSE

$$E \{ [z(t) - d(t)]^2 \} = \text{minimum}$$

$$z(t) = \sum_{n=-N}^N \alpha_n y(t - n\Delta)$$

Solution MMSE

$$E \{ [z(t) - d(t)]^2 \} = \text{minimum}$$

$$[R_{yy}][A]_{\text{opt}} = [R_{yd}]$$

$$[A]_{\text{opt}} = [R_{yy}]^{-1} [R_{yd}]$$

Bruit AWGN

- > Largeur de bande $B=1/2T$ pour le signal

$$\sigma_N^2 = \frac{N_0}{2T} \sum_{j=-N}^N \alpha_j^2$$

- > BPSK

$$Q\left(\sqrt{\frac{1}{\sum_j \alpha_j^2} \frac{2E_b}{N_0}}\right) \quad \text{perte en rapport signal-à-bruit}$$

DMT modulation par porteuse

- > n_i bits dans la constellation pour porteuse i

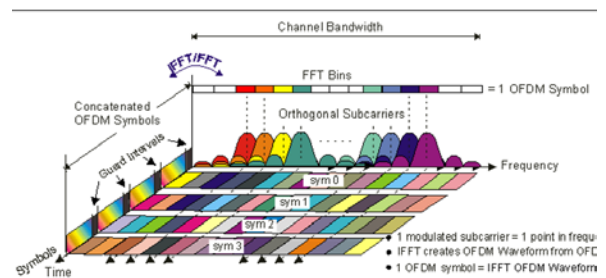
- > Taux de transmission $R_b = \sum_{i=1}^N n_i W_i$ bits/s

- > Puissance totale divisée

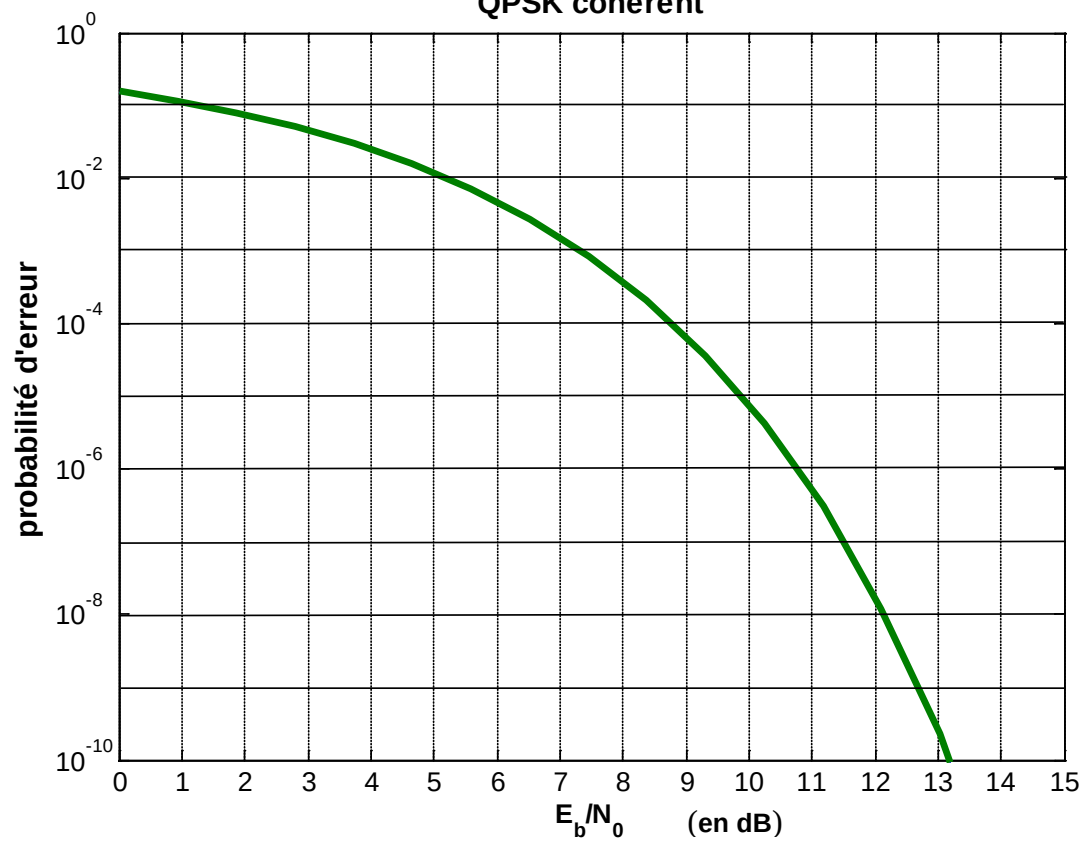
□ Puissance P_j $\sum_j P_j = P.$

- > Trouver les $\{P_j\}$ qui maximise R_b

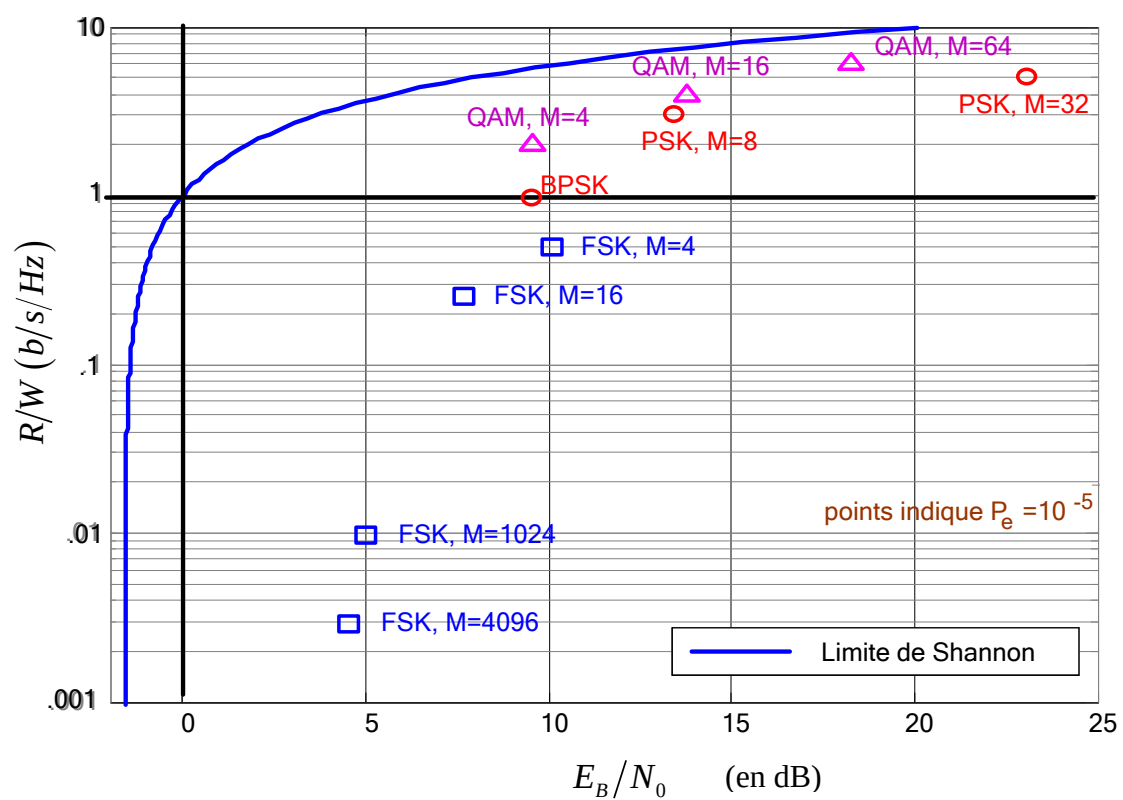
OFDM Temps et fréquence

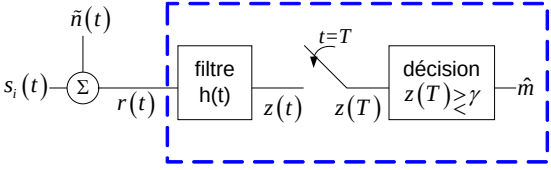
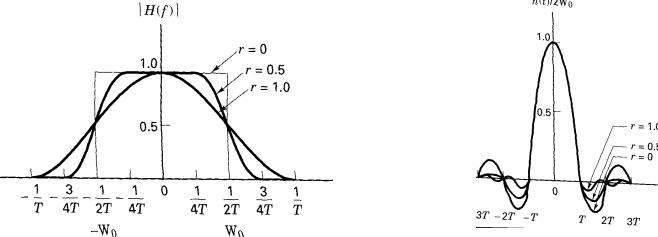


QPSK coherent



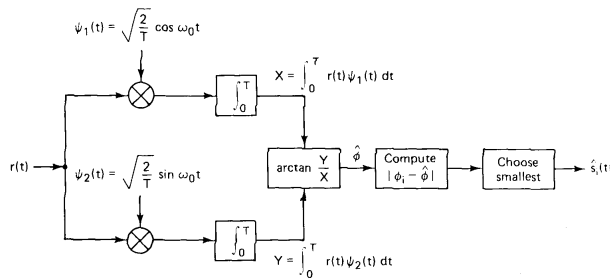
Plan de l'efficacité spectrale (Bandwidth Efficiency Plane)



Récepteur d'échantillonnage 	MAP: i qui maximise $p(z s_i) p(s_i)$ i qui minimise $\ \mathbf{r} - \mathbf{s}_i\ ^2 - N_0 \ln P(\mathbf{s}_i)$ $P(\mathbf{s}_i)$ = probabilité a priori de symbole $\mathbf{s}_i$ ML: i qui maximise $p(z s_i)$ i qui minimise $\ \mathbf{r} - \mathbf{s}_i\ ^2$
Raised cosine $v(t) = \frac{\sin(\pi t/T_s)}{\pi t/T_s} \frac{\cos(r\pi t/T_s)}{1 - 4r^2 t^2/T_s^2}$ 	Énergie moyenne $E_{\text{moy}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \ \mathbf{s}_i\ ^2$ $= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M [\text{énergie du signal } i]$ Énergie par bit v. énergie par symbole $E_b \log_2 M = E_s$
QAM $\eta = \log_2 M$ Conversion de l'espace I/Q vers espace du signal $(\tilde{a}_n^I, \tilde{a}_n^Q) = \sqrt{\frac{M \cdot E_s}{\sum_{i=1}^M [(a_n^I)^2 + (a_n^Q)^2]}} (a_n^I, a_n^Q)$ coordonnées, espace du signal (blue arrow pointing to $\tilde{a}_n^I, \tilde{a}_n^Q$) coordonnées, espace I/Q (red arrow pointing to a_n^I, a_n^Q) cas rectangulaire (carrée) $M=L^2$ $P_e = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q \left(\sqrt{\frac{3 \log_2 M}{(M-1)}} \frac{E_b}{N_0} \right) \quad d_{\min} = \sqrt{\frac{6 \log_2 L}{L^2 - 1}}$	Borne d'union $P_e \approx \frac{2K}{M} Q \left(\frac{D_{\min}}{\sqrt{2N_0}} \right) = \frac{2K}{M} Q \left(d_{\min} \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$ K est le nombre des paires des signaux séparés par la distance minimale $D_{\min}$ Distance minimale dans l'espace du signal $D_{\min} = \min_{i \neq k} \ \mathbf{s}_i - \mathbf{s}_k\ \quad \text{et} \quad d_{\min} = \frac{D_{\min}}{\sqrt{2E_b}}$
$P_e(\text{BPSK}) = Q \left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right)$ $P_e(\text{OOK}) = Q \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$ $P_e(\text{QPSK}) \approx 2Q \left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right)$ Perte par rapport à QPSK $d_{\min} = \sqrt{x} \sqrt{2} \quad \text{perte} = -10 \log_{10} x$	Pour une modulation orthogonale $P_e(\text{bit}) = P_b = P_e(\text{symbol}) \frac{M/2}{M-1}$ Pour une modulation non-orthogonale avec codage de gray $P_e(\text{bit}) = P_b = \frac{P_e(\text{symbol})}{\log_2 M}$ Efficacité spectrale $\eta = \frac{R_b}{W} = \frac{1}{T_b} \frac{1}{W} \text{ bits/s/Hz}$

MPSK cohérent

$$\eta = \log_2 M^\dagger$$

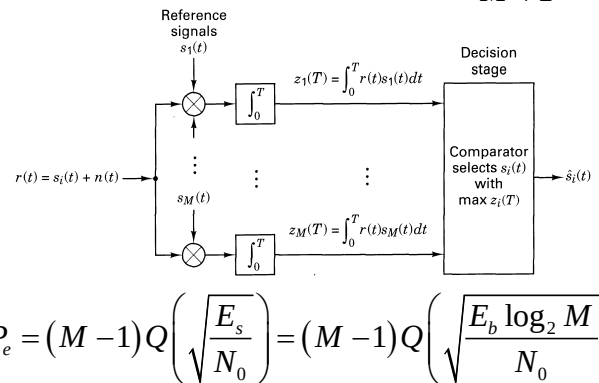


$$P_e(M) \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \sin \frac{\pi}{M}\right)$$

$$= 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b \log_2 M}{N_0}} \sin \frac{\pi}{M}\right)$$

MFSK cohérent

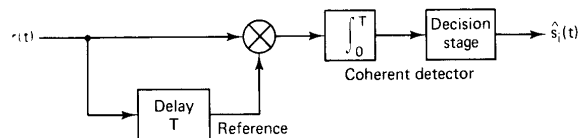
$$\eta = \frac{2 \log_2 M}{M+1}^\dagger$$



$$P_e = (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_b \log_2 M}{N_0}}\right)$$

Séparation minimale $1/2T_s$ **DPSK incohérent**

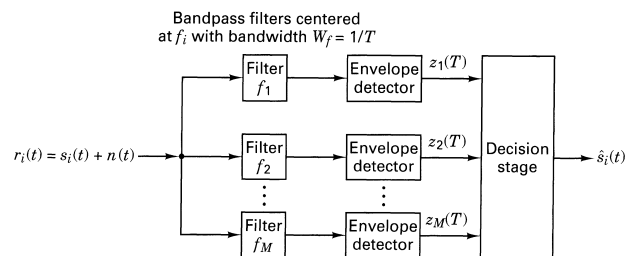
$$P_e = \frac{1}{2}e^{-E_b/N_0}$$



~1 dB de perte entre DPSK et BPSK

MFSK incohérent

$$\eta = \frac{\log_2 M}{M}^\dagger$$



$$P_e(BFSK) = \frac{1}{2}e^{-E_b/2N_0}$$

~1 dB de perte BFSK cohérente vs. incohérente

Séparation minimale $1/T_s$ **Loi de Shannon**

$$C = W \log_2(1 + SNR)$$

$$SNR = \frac{E_b}{N_0} \eta$$

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{W}{C} (2^{C/W} - 1) \quad \frac{C}{W} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} \rightarrow -1.6 \text{ dB}$$

Relations trigonométriques

θ	$\cos \theta$	$\sin \theta$	$\tan \theta$	$\tan(y) = x$ $\Leftrightarrow y = \arctan x + k\pi$
0	1	0	0	
$\pi/8$	.85	.38	.41	
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1	$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$
$\pi/3$	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}$	$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
$\pi/2$	0	1	∞	$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

Processus Gram Schmidt

$$\psi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{E_1}} s_1(t) \text{ où } E_1 = \int_0^T s_1^2(t) dt$$

$$\theta_2(t) = s_2(t) - \langle s_2(t), \psi_1(t) \rangle \psi_1(t)$$

$$E_2 = \int_0^T \theta_2^2(t) dt \quad \psi_2(t) = \frac{\theta_2(t)}{\sqrt{E_2}}$$

$$i. \quad \theta_i(t) = s_i(t) - \sum_{k=1}^{i-1} \langle s_i(t), \psi_k(t) \rangle \psi_k(t)$$

$$E_i = \int_0^T \theta_i^2(t) dt \quad \psi_i(t) = \frac{\theta_i(t)}{\sqrt{E_i}}$$

† en supposant une impulsion Nyquist idéale