

Théorème de l'inversibilité, revisité

- Pour une matrice $\mathbf{A}$ de dimension $n \times n$, les énoncés suivants sont équivalents :
 - elle est inversible ;
 - l'équation $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ ne possède que la solution triviale ;
 - l'équation $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ possède une solution unique pour chaque $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$;
 - sa forme échelon réduite est $\mathbf{I}$;
 - $\mathbf{A}$ est un produit de matrices élémentaires ;
 - $\text{rang}(\mathbf{A}) = n$
 - les colonnes de $\mathbf{A}$ sont linéairement indépendantes ;
 - les colonnes de $\mathbf{A}$ engendrent $\mathbb{R}^n$;
 - les colonnes de $\mathbf{A}$ forment une base pour $\mathbb{R}^n$;
 - on peut dire la même chose pour ses lignes !

Vecteur propre

- Un **vecteur propre** d'une matrice $\mathbf{A}$ de dimensions $n \times n$ est un vecteur non-nul tel que :

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$$

val. propre

vec. propre

$$5. \quad x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$$

$$x_k = ?$$

$$x_1 = A x_0$$

$$x_1 = A (c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3)$$

$$x_1 = A c_1 v_1 + A c_2 v_2 + A c_3 v_3$$

$$= c_1 A v_1 + c_2 A v_2 + c_3 A v_3$$

$$= \underbrace{c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + c_3 \lambda_3 v_3}$$

$$x_2 = A x_1$$

$$= A c_1 \lambda_1 v_1 + A c_2 \lambda_2 v_2 + A c_3 \lambda_3 v_3$$

$$= c_1 \lambda_1 A v_1 + \dots$$

$$= c_1 \lambda_1^2 v_1 + c_2 \lambda_2^2 v_2 + c_3 \lambda_3^2 v_3$$

$$x_k = c_1 \lambda_1^k v_1 + c_2 \lambda_2^k v_2 + c_3 \lambda_3^k v_3$$

Calcul des valeurs et vecteurs propres

- λ est une **valeur propre** de $\mathbf{A}$ si l'équation suivante admet une solution non-triviale :

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = 0$$

Problème : nous avons
2 inconnues (λ et $\mathbf{x}$)...

- Si l'espace nul n'est pas de dimension 0, cela revient à dire que la matrice $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ est **singulière**.

det

= 0

Besoin d'une façon (autre que l'élimination)
de déterminer si une matrice est singulière !

8.

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0,33 \\ + & 0 & 0 \\ 0 & 0,71 & 0,94 \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0,33 \\ + & -1 & 0 \\ 0 & 0,71 & 0,06 \end{vmatrix} = 0$$

$$-1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0,71 & 0,06 \end{vmatrix} + 0,33 \begin{vmatrix} + & -1 \\ 0 & 0,71 \end{vmatrix} = -0,06 + 0,234$$

⇓

$$0, 0, 0 = 0, \\ t = 0,$$

In Exercises 1–12, compute (a) the characteristic polynomial of A , (b) the eigenvalues of A , (c) a basis for each eigenspace of A , and (d) the algebraic and geometric multiplicity of each eigenvalue.

$$1. A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$2. A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3. A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$4. A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(6-\lambda) + 6 = 0$$

$$6 - 7\lambda + \lambda^2 + 6 = 0$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$$

$$(\lambda - 4)(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(3-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)((1-\lambda)(-2-\lambda)) = 0$$

~~$$(3-\lambda)(-\lambda^2 - \lambda + 2) = 0$$~~

$$(3-\lambda)(1-\lambda)(-2-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = -2$$

$$7. A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$