MAT-2930 Algèbre Linéaire Appliquée

Diagonalisation des matrices & Systèmes dynamiques discrets

Soit la suite entière d'ordre 2 définie par : $y_{k+2} = y_{k+1} + y_k$ avec les conditions initiales $y_0 = 0$ et $y_1 = 1$.

1. **(Matlab).** Calculer les premiers termes $y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10}$ de cette suite.

On voit tout de suite que le calcul de y_k avec l'équation ci-dessus devient de plus en plus laborieux au fur et à mesure que k devient plus grand. L'objectif de cet atelier est de trouver une relation bien plus simple qui permet de calculer directement y_k en fonction de k. Pour ce faire, on utilisera les notions d'algèbre matricielle en introduisant le vecteur u_k défini par :

$$u_k = \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \end{bmatrix}$$

La suite ci-dessus peut alors s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$u_{k+1} = A\, u_k$$

A étant une matrice carrée de genre 2.

2. **(Manuel).** Trouver la matrice A.
3. **(Manuel).** Exprimer u_k en fonction de A^k et u_0.
4. **(Matlab).** Calculer A^{10}. Utiliser le résultat pour déterminer y_{10}.
5. **(Manuel).** Donner l'équation caractéristique de la matrice A.
6. **(Manuel).** Monter que les vecteurs propres v_1 et v_2 associés respectivement à λ_1 et λ_2 s'écrivent comme suit en fonction de λ_1 et λ_2 :

$$v_1 = \begin{bmatrix} -\lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{bmatrix} -\lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

7. **(Manuel).** Expliquer pourquoi A est diagonalisable.
8. **(Manuel).** Exprimer en fonction de λ_1 et λ_2 les matrices P, P^{-1} et la matrice diagonale D tel que :

$$A = P\, D\, P^{-1}$$

9. **(Manuel).** Exprimer A^k en fonction de k, λ_1 et λ_2.
10. **(Manuel).** En déduire l'expression de y_k en fonction de k, λ_1 et λ_2.
11. **(Manuel).** Trouver les racines λ_1 et λ_2 de l'équation caractéristique de A.
12. **(Manuel).** En déduire l'équation régissant le comportement à long terme de la série.
13. **(Manuel).** En déduire la valeur du rapport y_{k+1}/y_k à long terme.
14. **(Matlab).** Calculer y_{10} en utilisant l'équation du point 10.
15. **(Matlab).** Calculer y_{10} en utilisant l'équation du point 12.