$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad c_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calcul de la matrice Q.

$$u_1 = c_1$$

$$u_2 = c_2 - \text{proj}_{\{u_1\}} c_2 = c_2 - \frac{c_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1$$

$$u_3 = c_3 - \text{proj}_{\{u_1, u_2\}} c_3 = c_3 - \frac{c_3 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 - \frac{c_3 \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2$$

⊛ $c_2 \cdot u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 - 1 - 4 - 4 + 2 = -5$

⊛ $u_1 \cdot u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$

$$\Rightarrow u_2 = c_2 - (-1)\, u_1 = c_2 + u_1 = c_2 + c_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Le calcul pour les fractions $\frac{c_3 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1}$ et $\frac{c_3 \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2}$ se fait de manière similaire.

On trouve :

$$\frac{c_3 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} = 4 \; ; \qquad \frac{c_3 \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow u_3 = c_3 - 4u_1 + \frac{1}{3} u_2$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ +4 \\ +4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Normalisation des vecteurs u_1, u_2 et u_3.

$$\mu_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{u_1}{(u_1 \cdot u_1)^{1/2}}$$

$$u_1 \cdot u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1+1+1+1+1 = 5$$

$$\Rightarrow \mu_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot u_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

On fait pareil pour μ_2 et μ_3.

$$\mu_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{u_2}{(u_2 \cdot u_2)^{1/2}} = \frac{u_2}{6} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\mu_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{u_3}{(u_3 \cdot u_3)^{1/2}} = \frac{u_3}{4} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

On déduit Q :

$$Q = [u_1 \quad u_2 \quad u_3] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 1/2 & 1/2 \\ -1/\sqrt{5} & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{5} & 1/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{5} & -1/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{5} & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Calcul de la matrice R.

On a : $C = QR$

$\Rightarrow Q^{-1}C = R$

Comme Q est orthonormale $\Rightarrow Q^{-1} = Q^t$

D'où finalement : $R = Q^t C$

$$R = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/2 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & -4 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R = \begin{pmatrix} 5/\sqrt{5} & -5/\sqrt{5} & 20/\sqrt{5} \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Vérification: $QR \stackrel{?}{=} C$

On trouve bien l'égalité après le calcul.

Q.3 Les résultats trouvés sont identiques.
(Matlab vs. Manuel)