
Solutionnaire | Calcul des valeurs propres par l'algorithme itératif QR

1. Nous avons :

$$A_1 = RQ = (Q^{-1}Q)RQ = Q^{-1}(QR)Q = Q^{-1}AQ,$$

On peut conclure de ce calcul que A_1 et A sont bien des matrices semblables (cf. Définition Page 301 du livre). Selon le Théorème 4.22 (cf. Page 302), A_1 et A ont les mêmes valeurs propres.

2. En utilisant Gram-Schmidt, nous obtenons :

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot 3}{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Après normalisation, nous obtenons la matrice Q :

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Ce qui donne finalement pour la matrice R :

$$R = Q^T A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

D'où la matrice A_1 :

$$A_1 = RQ = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(3 - \lambda)$$

$$\det(A_1 - \lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{5}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{5}{2} - \lambda\right) \left(\frac{3}{2} - \lambda\right) - \frac{3}{4} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3).$$

On conclut qu'effectivement A et A_1 ont les mêmes valeurs propres.

3. Montrons que A_n et A_{n-1} sont semblables pour tout n .

$$A_n = R_{n-1}Q_{n-1} = (Q_{n-1}^{-1}Q_{n-1})R_{n-1}Q_{n-1} = Q_{n-1}^{-1}(Q_{n-1}R_{n-1})Q_{n-1} = Q_{n-1}^{-1}A_{n-1}Q_{n-1},$$

4. Les calculs de A_1 à A_5 donnent :

$$\begin{aligned} A_1 &= Q_1 R_1 \approx \begin{bmatrix} 0.86 & 0.51 \\ -0.51 & 0.86 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.92 & -1.20 \\ 0 & 1.04 \end{bmatrix} \Rightarrow A_2 = R_1 Q_1 \approx \begin{bmatrix} 3.12 & 0.47 \\ -0.53 & 0.88 \end{bmatrix} \\ A_2 &= Q_2 R_2 \approx \begin{bmatrix} -0.99 & 0.17 \\ 0.17 & 0.99 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3.16 & -0.32 \\ 0 & 0.95 \end{bmatrix} \Rightarrow A_3 = R_2 Q_2 \approx \begin{bmatrix} 3.06 & -0.84 \\ 0.16 & 0.93 \end{bmatrix} \\ A_3 &= Q_3 R_3 \approx \begin{bmatrix} -1.00 & -0.05 \\ -0.05 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3.06 & 0.79 \\ 0 & 0.97 \end{bmatrix} \Rightarrow A_4 = R_3 Q_3 \approx \begin{bmatrix} 3.02 & 0.94 \\ -0.05 & 0.97 \end{bmatrix} \\ A_4 &= Q_4 R_4 \approx \begin{bmatrix} -1.00 & 0.02 \\ 0.02 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3.02 & -0.92 \\ 0 & 0.99 \end{bmatrix} \Rightarrow A_5 = R_4 Q_4 \approx \begin{bmatrix} 3.00 & -0.98 \\ 0.02 & 0.99 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

On constate que les matrices A_k convergent vers une matrice triangulaire supérieure U .

5. Les éléments sur la diagonale de U représentent donc les valeurs propres de la matrice A .

6. a)

$$\begin{aligned} A &= QR \approx \begin{bmatrix} 0.71 & 0.71 \\ 0.71 & -0.71 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.83 & 2.83 \\ 0 & 1.41 \end{bmatrix} \Rightarrow A_1 = RQ \approx \begin{bmatrix} 4.02 & 0.00 \\ 1.00 & -1.00 \end{bmatrix} \\ A_1 &= Q_1 R_1 \approx \begin{bmatrix} -0.97 & -0.24 \\ -0.24 & 0.97 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4.14 & 0.24 \\ 0 & -0.97 \end{bmatrix} \Rightarrow A_2 = R_1 Q_1 \approx \begin{bmatrix} 3.96 & 1.23 \\ 0.23 & -0.94 \end{bmatrix} \\ A_2 &= Q_2 R_2 \approx \begin{bmatrix} -1.00 & -0.06 \\ -0.06 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3.97 & -1.17 \\ 0 & -1.01 \end{bmatrix} \Rightarrow A_3 = R_2 Q_2 \approx \begin{bmatrix} 4.04 & -0.93 \\ 0.06 & -1.01 \end{bmatrix} \\ A_3 &= Q_3 R_3 \approx \begin{bmatrix} -1.00 & -0.01 \\ -0.01 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4.04 & 0.94 \\ 0 & -1.00 \end{bmatrix} \Rightarrow A_4 = R_3 Q_3 \approx \begin{bmatrix} 4.03 & 0.98 \\ 0.01 & -1.00 \end{bmatrix} \\ A_4 &= Q_4 R_4 \approx \begin{bmatrix} -1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4.03 & -0.98 \\ 0 & -1.00 \end{bmatrix} \Rightarrow A_5 = R_4 Q_4 \approx \begin{bmatrix} 4.03 & -0.98 \\ 0.00 & -1.00 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont approximativement 4.03 et -1.00.

b)

$$\begin{aligned}
A &= QR \approx \begin{bmatrix} 0.45 & 0.89 \\ 0.89 & -0.45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.24 & 1.34 \\ 0 & 0.45 \end{bmatrix} \Rightarrow A_1 = RQ \approx \begin{bmatrix} 2.20 & 1.40 \\ 0.40 & -0.20 \end{bmatrix} \\
A_1 &= Q_1 R_1 \approx \begin{bmatrix} -0.98 & -0.18 \\ -0.18 & 0.98 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.24 & -1.34 \\ 0 & -0.45 \end{bmatrix} \Rightarrow A_2 = R_1 Q_1 \approx \begin{bmatrix} 2.44 & -0.92 \\ 0.08 & -0.44 \end{bmatrix} \\
A_2 &= Q_2 R_2 \approx \begin{bmatrix} -1.00 & -0.03 \\ -0.03 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.44 & 0.93 \\ 0 & -0.41 \end{bmatrix} \Rightarrow A_3 = R_2 Q_2 \approx \begin{bmatrix} 2.41 & 1.01 \\ 0.01 & -0.41 \end{bmatrix} \\
A_3 &= Q_3 R_3 \approx \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.41 & -1.01 \\ 0 & -0.42 \end{bmatrix} \Rightarrow A_4 = R_3 Q_3 \approx \begin{bmatrix} 2.42 & -1 \\ 0 & -0.42 \end{bmatrix} \\
A_4 &= Q_4 R_4 \approx \begin{bmatrix} -1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.42 & 1 \\ 0 & -0.41 \end{bmatrix} \Rightarrow A_5 = R_4 Q_4 \approx \begin{bmatrix} 2.41 & 1 \\ 0 & -0.41 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont approximativement 2.41 et -0.41.

c)

$$\begin{aligned}
A &= QR \approx \begin{bmatrix} 0.24 & -0.06 & -0.97 \\ 0.24 & 0.97 & 0 \\ -0.94 & 0.23 & -0.24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.24 & 0.47 & -0.94 \\ 0 & 1.94 & 1.26 \\ 0 & 0 & 0.73 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
A_1 &= RQ \approx \begin{bmatrix} 2.00 & 0 & -3.89 \\ -0.73 & 2.18 & -0.31 \\ -0.69 & 0.17 & -0.18 \end{bmatrix} \\
A_1 &= Q_1 R_1 \approx \begin{bmatrix} -0.89 & -0.33 & 0.30 \\ 0.33 & -0.94 & -0.07 \\ 0.31 & 0.03 & 0.95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.24 & 0.76 & 3.32 \\ 0 & -2.05 & 1.57 \\ 0 & 0 & -1.31 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
A_2 &= R_1 Q_1 \approx \begin{bmatrix} 3.27 & 0.13 & 2.44 \\ -0.18 & 1.98 & 1.64 \\ -0.40 & -0.04 & -1.25 \end{bmatrix} \\
A_2 &= Q_2 R_2 \approx \begin{bmatrix} -0.99 & -0.05 & 0.12 \\ 0.06 & -1.00 & 0.01 \\ 0.12 & 0.02 & 0.99 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3.3 & -0.03 & -2.47 \\ 0 & -1.99 & -1.8 \\ 0 & 0 & -1.31 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
A_3 &= R_2 Q_2 \approx \begin{bmatrix} 2.96 & 0.16 & -2.86 \\ -0.33 & 1.95 & -1.81 \\ -0.11 & -0.02 & -0.91 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$A_3 = Q_3 R_3 \approx \begin{bmatrix} -0.99 & -0.11 & 0.04 \\ 0.11 & -0.99 & 0.01 \\ 0.04 & 0.01 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.98 & 0.06 & 2.61 \\ 0 & -1.95 & 2.10 \\ 0 & 0 & -1.03 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A_4 = R_3 Q_3 \approx \begin{bmatrix} 3.07 & 0.30 & 2.49 \\ -0.14 & 1.96 & 2.09 \\ -0.04 & -0.01 & -1.03 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = Q_4 R_4 \approx \begin{bmatrix} -1 & -0.04 & 0.01 \\ 0.04 & -1 & 0 \\ 0.01 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3.07 & -0.21 & -2.41 \\ 0 & -1.97 & -2.20 \\ 0 & 0 & -0.99 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A_5 = R_4 Q_4 \approx \begin{bmatrix} 3.03 & 0.34 & -2.45 \\ -0.12 & 1.96 & -2.21 \\ -0.01 & 0 & -0.99 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont approximativement 3.03, 1.96 et -0.99.

d)

$$A = QR \approx \begin{bmatrix} 0.45 & 0.72 \\ 0 & 0.60 \\ -0.89 & 0.36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.24 & -3.13 & -2.24 \\ 0 & 3.35 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A_1 = RQ \approx \begin{bmatrix} 3.00 & -1.07 \\ 0 & 2.00 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = Q_1 R_1 \approx \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.00 & -1.07 \\ 0 & 2.00 \end{bmatrix} \Rightarrow A_2 = R_1 Q_1 \approx \begin{bmatrix} 3.00 & -1.07 \\ 0 & 2.00 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont approximativement 3, 2 et 0.

7.

$$A = QR = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & \frac{8}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \Rightarrow A_1 = RQ = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{21}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$A_1 = Q_1 R_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{8}{\sqrt{5}} \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \Rightarrow A_2 = R_1 Q_1 \approx \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = A.$$

L'algorithme échoue et ne converge pas car les deux valeurs propres de A, qui sont -1 et +1, car elles n'ont pas des modules distincts.

8.

On décale la matrice d'origine et on exécute la même approche sur la nouvelle matrice :

$$B = A + 0.9I = \begin{bmatrix} 2.9 & 3 \\ -1 & -1.1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} B &= QR \approx \begin{bmatrix} -0.95 & 0.33 \\ 0.33 & 0.95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3.07 & -3.19 \\ 0 & -0.06 \end{bmatrix} \Rightarrow B_1 = RQ \approx \begin{bmatrix} 1.86 & -4.02 \\ -0.02 & -0.06 \end{bmatrix} \\ B_1 &= Q_1 R_1 \approx \begin{bmatrix} -1 & 0.01 \\ 0.01 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.86 & 4.02 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix} \Rightarrow B_2 = R_1 Q_1 \approx \begin{bmatrix} 1.9 & 4 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix} \\ B_2 &= Q_2 R_2 \approx \begin{bmatrix} -1.00 & 0 \\ 0 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.9 & -4 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix} \Rightarrow B_3 = R_2 Q_2 \approx \begin{bmatrix} 1.9 & -4 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Les valeurs propres de la nouvelle matrice B sont approximativement 1.9 et -0.1, donc les valeurs propres de la matrice d'origine A sont approximativement $1.9 - 0.9 = 1.0$ et $-0.1 - 0.9 = -1.0$.
