

2016

Problème 3 - (25 points) – (Manuel à 100% - Tout dans le cahier d'examen)

Soit le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{aligned} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 15x_1 - 7x_2 + 5x_3 &= -1 \\ -10x_1 + 12x_2 + (h^2 - 16)x_3 &= h - 11 \end{aligned}$$

- a) Trouvez les valeurs de h pour lesquelles le système n'admet pas de solution.
b) Trouvez les valeurs de h pour lesquelles le système admet une infinité de solutions.
c) Trouvez les valeurs de h pour lesquelles le système admet une solution unique.

$$\text{Aug} = \begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & 2 & 1 \\ 15 & -7 & 5 & -1 \\ -10 & 12 & h^2 - 16 & h - 11 \end{array} \quad \begin{aligned} L_2 &= L_2 - 3L_1 \\ L_3 &= L_3 + 2L_1 \end{aligned}$$

$$= \begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 6 & h^2 - 12 & h - 9 \end{array} \quad L_3 = L_3 - 3L_2$$

$$= \begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & h^2 - 9 & h + 3 \end{array}$$

$$x_3 \cdot (h^2 - 9) \neq h + 3 \quad \leftarrow \text{on veut}$$

on cherche h $\begin{cases} h^2 - 9 = 0 \\ h + 3 \neq 0 \end{cases}$

$$h = \begin{cases} 3 \\ \text{ou} \\ -3 \end{cases}$$

Preuve :

$$\begin{cases} 3^2 - 9 = 0 \\ 3 + 3 = 6 \end{cases}$$

a) $h = 3$

b) on veut $\begin{cases} h^2 - 9 = 0 \\ h + 3 = 0 \end{cases}$

$$\boxed{h = -3} \implies$$

$$h^2 - 9 = 3^2 - 9 = 0$$

$$h + 3 = -3 + 3 = 0$$

c)

$$h \neq 3$$

$$h \neq -3$$

2018

Problème 1 (33 points) - Factorisations $P^T LU$ | (Livable Matlab : facto.m)

Remarque: Pour ce script, utiliser le *format d'affichage rationnel* (i.e. fractions)

Soit la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = P^T$$

1. (**Manuel**). Déterminer la factorisation $P^T LU$ de la matrice A .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 = L_2 - \frac{1}{2}L_1} L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad P^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. (Manuel). Soit le vecteur : $\mathbf{b} = [1 \ 2 \ 3]^T$

$$\mathbf{b}' = \mathbf{P} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Résoudre manuellement l'équation matricielle $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ en utilisant la factorisation obtenue au point 2). Le calcul doit être exact, ne pas arrondir les fractions. Donner la solution $\mathbf{x}$ sous la forme de fractions.

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{b}'$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 3 \\ 1/2 y_1 + y_2 = 2 \\ y_2 = 1/2 \\ y_3 = 1 \end{cases}$$

$$\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$6x_3 = 1$$

$$\boxed{x_3 = 1/6}$$

$$3/2 x_2 + x_3 = 1/2$$

$$\boxed{x_2 = 2/9}$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 3$$

$$\boxed{x_1 = 19/18}$$

2018

Problème 2 (27 points) – Sous-espaces vectoriels | (Livable Matlab : espaces.m)

Soit la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

1. (Matlab). Trouver la forme échelonnée réduite R de la matrice A en utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan. Afficher R .
2. (Manuel). Déterminer une base de l'espace des colonnes de A , $\text{Col}(A)$.

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 4 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

```
>> AR = rref(A)
AR =
    1     0     1     0    -1
    0     1     2     0     3
    0     0     0     1     4
    0     0     0     0     0
```

↑ ↑ ↑
1 2 4

3. (Manuel). Déterminer une base de l'espace nul de A, $\text{Nul}(A)$.

base x_1, x_2, x_4

libre x_3, x_5

```
>> AR = rref(A)
AR =
```

1	0	1	0	-1
0	1	2	0	3
0	0	0	1	4
0	0	0	0	0

↑ ↑ ↑

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 x_1 + x_3 - x_5 &= 0 \\
 x_1 &= x_5 - x_3 \\
 x_2 + 2x_3 + 3x_5 &= 0 \\
 x_2 &= -2x_3 - 3x_5 \\
 x_4 + 4x_5 &= 0 \\
 x_4 &= -4x_5
 \end{aligned} \right\} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Sous-espace nul

8. (Matlab). Calculer le rang k de la matrice A . Afficher k .

3

9. (Matlab). Afficher un commentaire dans la fenêtre commande pour expliquer le lien du rang k avec $\text{Col}(A)$ ou/et $\text{Nul}(A)$.

Soit le vecteur : $u = [4 \ 9 \ 6 \ 1]^T$

10. (Matlab). Déterminer si le vecteur u appartient à $\text{Col}(A)$. Afficher tout ce qui semble pertinent (calcul, commentaires) pour une réponse claire à cette question.

$$[A \mid u]$$

Soit le vecteur : $v = [4 \ 9 \ 6 \ 1 \ 0]^T$

11. (Matlab). Déterminer si le vecteur v appartient à $\text{Nul}(A)$. Afficher tout ce qui semble pertinent (calcul, commentaires) pour une réponse claire à cette question.

$$\dim(\text{Col}(A)) = 3 = k$$

$$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \mid 1$$

$$\begin{aligned} \dim(\text{Nul}(A)) &= \# \text{col} - k \\ &= 5 - 3 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$A v = 0$$

$\swarrow \quad \searrow$
 $3 \times 5 \quad 4 \times 1$
incompatible

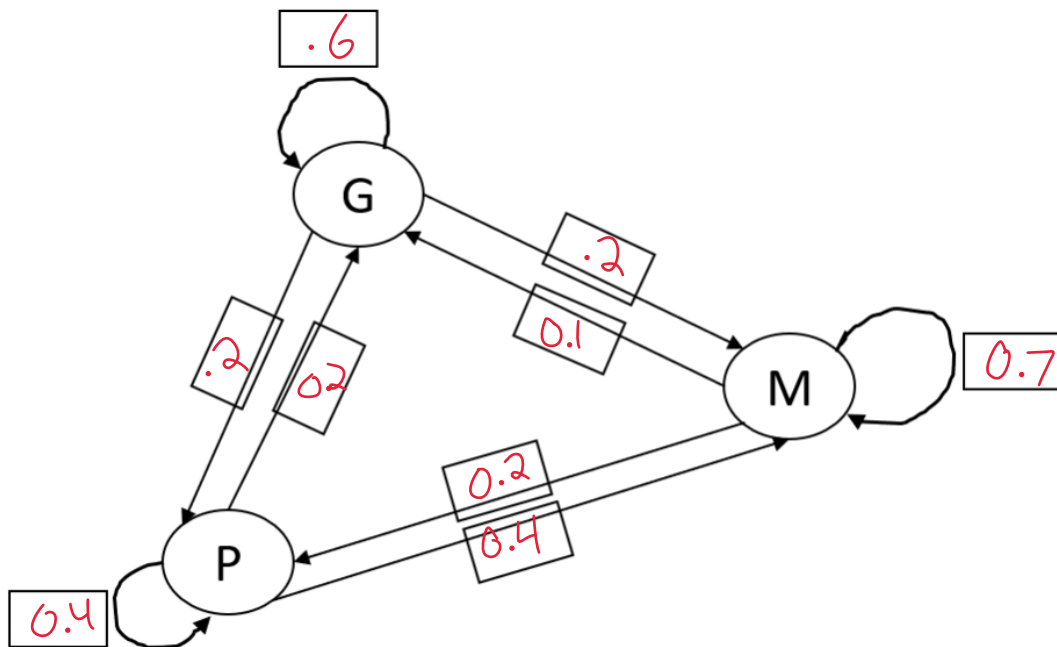
2021

6. (20 points) Chaîne de Markov

Des données ont été accumulées sur la taille des enfants par rapport à celle de leurs parents stipulent que

- Les probabilités qu'un parent de **grande (G)** taille ait un enfant de grande, moyenne ou petite taille sont respectivement de 0.6, 0.2 et 0.2.
- Les probabilités qu'un parent de **moyenne (M)** taille ait un enfant de grande, moyenne ou petite taille sont respectivement de 0.1, 0.7 et 0.2.
- Les probabilités qu'un parent de **petite (P)** taille ait un enfant de grande, moyenne ou petite taille sont respectivement de 0.2, 0.4 et 0.4.

- (a) (3 points) Compléter le graphe de la chaîne de Markov en inscrivant les différentes probabilités de transition dans les rectangles de la figure suivante.



- (b) (3 points) Déterminer la matrice stochastique P décrivant cette chaîne de Markov.

est

$$P = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.7 & 0.4 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{matrix} G \\ M \\ P \end{matrix}$$

enfant

- (c) (2 points) Sans utiliser la chaîne de Markov calculer la probabilité qu'une personne de petite taille aie un petit enfant de grande taille.

$$\underset{G}{0.2} \times \underset{M}{0.6} + \underset{M}{0.4} \times \underset{P}{0.1} + \underset{P}{0.4} \times 0.2 = 0.24$$

- (d) (4 points) Utiliser la matrice P de la chaîne de Markov pour déterminer la probabilité qu'une personne de petite taille aie un petit enfant de grande taille.

$$\cancel{P} \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = P x_0 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = P x_1 = \begin{bmatrix} .6 & .1 & .2 \\ .2 & .7 & .4 \\ .2 & 0.2 & .4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .2 \\ .4 \\ .4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.24 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$0.24$$

(e) (8 points) Quelle sera la proportion de la taille de la population à long terme.

$$Pq = q$$
$$(I - P)q = 0$$
$$\begin{bmatrix} 1.6 & -.1 & -.2 \\ -.2 & 1.7 & -.4 \\ -.2 & -.2 & 1.4 \end{bmatrix} \begin{matrix} | \\ | \\ | \end{matrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$
$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0.4 & -.1 & -.2 & | & 0 \\ 0 & 0.25 & -.5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$$

$$2.5x_2 - 5x_3 = 0$$

$$* \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$q = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$