Examen 2 – Pondération (37.5%) **MAT-2930 / Algèbre Linéaire Appliquée**

Prof. : Hakim Bendada **21 décembre 2017, 13h30 à 16h20**

Problème 1 (34 points) | Livrable Matlab : Script « prob1.m »

Soit l'image d'origine montrant un renard fournie dans le répertoire de l'examen.

a) **(Matlab).** Télécharger l'image d'origine.

(Matlab). Dessiner l'image d'origine dans une $1^{\text{ère}}$ figure.

b) **(Matlab).** Extraire l'image I qui correspond au canal rouge de l'image d'origine.

(Matlab). Dessiner l'image I dans une $2^{\text{ème}}$ figure.

c) **(Matlab).** Calculer, puis afficher, le nombre de mégapixels de l'image I.

On veut compresser l'image I par une SVD tronquée en ne sélectionnant que ses k premières valeurs singulières. On appellera I_k l'image compressée.

d) **(Matlab).** Calculer l'image I_k pour chacune des valeurs suivantes de k : 2, 5, 10, 15, 20, 25, 50, 100 et 1080.

(Matlab). Dessiner les images I_k dans une $3^{\text{ème}}$ figure. Pour ce faire, partager la fenêtre de la figure en une grille de 3 x 3 sous-figures. Préciser en titre la valeur de k pour chaque sou-figure.

e) **(Matlab).** Afficher une phrase indiquant la plus petite valeur k, parmi celles utilisées au point d), qui donne l'image compressée I_k la plus fidèle visuellement à l'image I.

f) **(Matlab).** Calculer dans ce cas le taux de compression atteint en % et l'afficher.

Problème 2 (15 points) | Livrable Matlab : Script « prob2.m »

a) **(Matlab).** Trouver une base $\mathcal{B}$ orthogonale de R^4 qui contient les vecteurs : $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *et* $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

b) **(Matlab).** Soit le vecteur $x = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ de R^4. Calculer ses coordonnées $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Problème 3 (27 points) | **Livrable Matlab :** Script « prob3.m »

Les données numériques de ce problème sont dans le fichier data.txt.

Les températures moyennes maximales et minimales à Washington pour certains jours de l'année sont listées dans le tableau ci-dessous.

a) **(Matlab).** Tracer les deux nuages de points qui illustrent ces données sur la même figure. Cadrer les axes entre 0 et 400 pour les abscisses, entre 0 et 100 pour les ordonnées. Ajouter une grille majeure et une grille mineure. Donner des titres aux deux axes.

Date	**x** Numéro du jour (de 1 à 365 jours)	$\mathbf{y_{max}}$ Température maximale (F)	$\mathbf{y_{min}}$ Température minimale (F)
15 janvier	15	50	31
15 mars	74	61	39
15 mai	135	79	57
15 juillet	196	88	69
15 septembre	258	82	63
15 novembre	319	62	40

On veut approximer au sens des moindres carrés chacun des deux nuages de points par une fonction périodique de période 365 jours : $y = \beta_0 + \beta_1\, cos\left(\frac{2\pi\, x}{365}\right) + \beta_2\, sin\left(\frac{2\pi\, x}{365}\right)$.

b) **(Matlab).** - Utiliser la factorisation QR pour trouver la meilleure approximation pour le premier nuage de points (x, y_{max}). Afficher le vecteur $\beta = [\,\beta_0, \beta_1, \beta_2\,]^T$.

- Calculer, puis afficher, l'erreur quadratique moyenne.
- Superposer la courbe de l'approximation sur le nuage de points avec une résolution de 1 jour en abscisse.

c) **(Matlab).** Idem que b) pour le deuxième nuage de points (x, y_{min}).

d) **(Matlab).** Prédire, puis afficher, les températures maximale et minimale au 20 avril $(x = 110)$.

Problème 4 (24 points) | **Livrable Matlab :** Script « prob4.m »

Les données numériques de ce problème sont dans le fichier data.txt.

Un championnat de basketball a eu lieu entre huit équipes. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous où S_{ij} représente le nombre de points marqués par l'équipe i contre l'équipe j.

Tableau des points marqués S_{ij}

Équipe j → i↓	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	0	14	3	17	24	0	35	2
2	7	0	14	31	45	2	29	28
3	7	31	0	42	7	17	7	34
4	12	10	34	0	20	31	12	14
5	27	28	35	27	0	14	15	20
6	3	24	41	7	41	0	13	35
7	38	23	27	13	31	17	0	49
8	3	16	30	14	13	8	35	0

L'objectif ici est d'établir le classement des équipes par ordre décroissant de compétitivité suite aux résultats du championnat. Pour ce faire, on associe une variable de classement r_i positive à chaque équipe i telle que $r_i > r_j$ indique que l'équipe i est mieux classée que l'équipe j. Afin d'établir un classement le plus juste possible, on impose que le classement de l'équipe i soit proportionnel à la somme des classements des équipes restantes :

$$r_i = k \sum_{j=1}^{8} a_{ij}\, r_j \ , \qquad 1 \le i \le 8$$

où k est la constante de proportionnalité et a_{ij} sont des pondérations tenant compte des scores S_{ij} :

$$a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{S_{ij}+1}{S_{ij}+S_{ji}+2}, & i \ne j \\ 0, & i = j \end{cases}$$

a) **(Matlab).** Afficher l'équation matricielle qui décrit le problème en fonction du vecteur classement $\mathbf{r} = [r_1, r_2, ..., r_8]^T$, la matrice $A = [a_{ij}]$ et la constante k.
b) **(Matlab).** Calculer puis afficher le vecteur **r**.
c) **(Matlab).** Ranger les valeurs r_i par ordre décroissant. Afficher le classement des huit équipes.