

ATTENTION : Ne pas arrondir les fractions et les nombres irrationnels dans les questions (Manuel).

Les matrices et vecteurs des problèmes 1 à 4 sont disponibles dans le fichier data.txt.

Problème 1 (28 points) | Livrable Matlab : « racines.m »

Soit la matrice symétrique : $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

- (Matlab)**. Déterminer les coefficients du polynôme caractéristique de A.
- (Matlab)**. Trouver les valeurs propres de A en utilisant le résultat trouvé au point a).
- (Manuel)**. Trouver les vecteurs propres de A.
- (Manuel)**. Diagonaliser orthogonalement la matrice A.

Problème 2 (15 points) | Livrable Matlab : « facto.m »

Soit la matrice : $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ Soit le vecteur : $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \\ 14 \end{bmatrix}$

- (Matlab)**. Déterminer la factorisation QR de A. Afficher Q et R.
- (Matlab)**. Trouver une solution approximative au sens des moindres carrés de l'équation matricielle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en utilisant la factorisation QR obtenue ci-dessus. Afficher le résultat.
- (Matlab)**. Calculer l'erreur quadratique moyenne de cette approximation. L'afficher.

Problème 3 (30 points) | Livrable Matlab : « decompo.m »

Soit la matrice : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ Soit le vecteur : $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

- (Manuel)**. Trouver la décomposition en valeurs singulières (i.e. SVD) de la matrice A.
- (Matlab)**. Trouver la décomposition en valeurs singulières (i.e. SVD) de la matrice A. Afficher les trois matrices.
- (Matlab)**. Trouver une solution approximative au sens des moindres carrés de l'équation matricielle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en utilisant le pseudo-inverse de A. Afficher le résultat.

Problème 4 (27 points) | Livrable Matlab : Script « compression.m »

Soit l'image d'origine Chaton.bmp montrant un chaton dans le répertoire de l'examen.

- (Matlab)**. Télécharger l'image d'origine qu'on appellera I. Dessiner I dans une 1^{ère} figure.

On veut compresser l'image d'origine I par une SVD tronquée en ne sélectionnant que ses k premières valeurs singulières. On appellera I_k l'image compressée.

- (Matlab)**. Calculer l'image I_k pour chacune des valeurs suivantes de k : 2, 4, 6, 8, 10, 15, 25, 35, 45. Dessiner les 9 images I_k dans une 2^{ème} figure. Pour ce faire, partager la figure en une grille de 3 x 3 sous-figures. Préciser dans le titre de chaque sous-figure la valeur de k utilisée par la commande : `title(['k = ' num2str(k)])`.
- (Matlab)**. Calculer le taux de compression atteint en % si on considère que l'image compressée I_{35} est assez représentative de l'image d'origine I. Afficher le résultat.

Bonne Chance !