

CONSIGNES

- I. Les matrices des 3 problèmes sont accessibles dans le fichier **Data.txt** disponible dans le répertoire de l'examen.*
- II. Les réponses aux questions identifiées par **(Manuel)** doivent être faites dans le cahier d'examen.*
- III. Les réponses aux questions identifiées par **(Matlab)** doivent être faites dans les scripts Matlab.*
- IV. Les affichages demandés dans Matlab doivent tous être affichés dans **la fenêtre commande**.*

VOTRE SOUMISSION

- I. Cahier d'examen*
 - II. Trois scripts : `facto.m`, `espaces.m`, `leslie.m`*
-

BON EXAMEN !

Problème 1 (33 points) - Factorisations $P^T LU$ | (Livrable Matlab : facto.m)

Remarque: Pour ce script, utiliser le *format d'affichage rationnel (i.e. fractions)*

Soit la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

1. **(Manuel).** Déterminer la factorisation $P^T LU$ de la matrice A .
2. **(Matlab).** Déterminer la factorisation $P^T LU$ de la matrice A . Afficher P , L et U .
3. **(Matlab).** Afficher un commentaire dans la fenêtre commande pour comparer les résultats obtenus aux points 1 et 2.
4. **(Manuel).** Soit le vecteur : $\mathbf{b} = [1 \ 2 \ 3]^T$

Résoudre manuellement l'équation matricielle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en utilisant la factorisation obtenue au point 2). *Le calcul doit être exact, ne pas arrondir les fractions. Donner la solution $\mathbf{x}$ sous la forme de fractions.*

5. **(Matlab).** Utiliser l'algorithme de Gauss-Jordan pour résoudre la même équation matricielle. Afficher $\mathbf{x}$.
-

Problème 2 (27 points) – Sous-espaces vectoriels | (Livrable Matlab : espaces.m)

Soit la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

1. **(Matlab).** Trouver la forme échelonnée réduite R de la matrice A en utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan. Afficher R .
2. **(Manuel).** Déterminer une base de l'espace des colonnes de A , $\text{Col}(A)$.
3. **(Manuel).** Déterminer une base de l'espace nul de A , $\text{Nul}(A)$.
4. **(Matlab).** Déterminer une base de l'espace des colonnes de A , $\text{Col}(A)$. Afficher la base.
5. **(Matlab).** Déterminer une base de l'espace nul de A , $\text{Nul}(A)$. Afficher la base.
6. **(Matlab).** Afficher un commentaire dans la fenêtre commande pour comparer les résultats obtenus aux points 2) et 4). Justifier les éventuelles différences.
7. **(Matlab).** Afficher un commentaire dans la fenêtre commande pour comparer les résultats obtenus aux points 3) et 5). Justifier les éventuelles différences.
8. **(Matlab).** Calculer le rang k de la matrice A . Afficher k .
9. **(Matlab).** Afficher un commentaire dans la fenêtre commande pour expliquer le lien du rang k avec $\text{Col}(A)$ ou/et $\text{Nul}(A)$.

Soit le vecteur : $\mathbf{u} = [4 \ 9 \ 6 \ 1]^T$

10. **(Matlab).** Déterminer si le vecteur $\mathbf{u}$ appartient à $\text{Col}(A)$. Afficher tout ce qui semble pertinent (calcul, commentaires) pour une réponse claire à cette question.

Soit le vecteur : $\mathbf{v} = [4 \ 9 \ 6 \ 1 \ 0]^T$

11. **(Matlab).** Déterminer si le vecteur $\mathbf{v}$ appartient à $\text{Nul}(A)$. Afficher tout ce qui semble pertinent (calcul, commentaires) pour une réponse claire à cette question.

Problème 3 (40 points) – Modèle de Leslie | (Livable Matlab : leslie.m)

Remarque: Pour ce script, utiliser le format d’affichage *format shortg*

Une population a quatre classes d’âges identifiées par les chiffres 1 à 4. La durée de chaque classe étant un an.

Les populations initiales en 2018 dans les classes 1 à 4 sont respectivement de 8, 10, 12 et 7.

La matrice de Leslie de cette population est :

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 & 2 \\ 0.60 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 \end{bmatrix}$$

1. **(Matlab).** Déterminer les nombres des quatre populations de 2018 à 2040. Arrondir les résultats à 0 chiffres après le point décimal.
2. **(Matlab).** Afficher les résultats obtenus au point 1) sous la forme d’une table de 5 colonnes. La colonne 1 pour les années, les autres colonnes pour les classes 1, 2, 3 et 4.
3. **(Matlab).** Dessiner l’évolution des quatre populations de 2018 à 2040. Donner des légendes aux quatre courbes. Donner des noms au graphe et aux axes.
4. **(Matlab).** Déterminer les pourcentages des quatre populations de 2018 à 2040.
5. **(Matlab).** Afficher les résultats obtenus au point 4) sous la forme d’une table de 5 colonnes. La colonne 1 pour les années, les autres colonnes pour les classes 1, 2, 3 et 4.
6. **(Matlab).** Dessiner dans une nouvelle figure l’évolution des quatre populations en terme de pourcentage de 2018 à 2040. Donner des légendes aux quatre courbes. Donner des noms au graphe et aux axes.
7. **(Matlab).** Que peut-on conclure de la figure du point 6) ? Afficher la réponse.
8. **(Matlab).** Déterminer une estimation des pourcentages des quatre populations à très long terme. Afficher ces pourcentages.