MAT-2930 Algèbre linéaire appliquée
Département de génie électrique et de génie informatique

Enseignant : Dominique Beaulieu
Durée : 2 heure et 50 minutes + 15 minutes pour le dépôt
Date : jeudi, 10 décembre 2020
Heure : 13h30 à 16h20 + 15 minutes
Local : à distance
Pondération : 35 %

INSTRUCTIONS IMPORTANTES

1. **Documentation permise : toute documentation dans les limites de la Déclaration d'intégrité.**
2. **Cet examen comporte 11 questions**
3. **La question 1 est une question bonus de 5 points à répondre sur une feuille blanche (calculs non exigés).**
4. **Les questions 2 à 7 valent 15 points chacune et doivent être répondues manuellement sur des feuilles blanches en développant les étapes de calculs (voir le point 6).**
5. **La question 8 vaut 30 points et doit être répondue manuellement sur des feuilles blanches en développant les étapes de calculs (voir le point 6).**
6. **Les questions 9 à 11 sont à faire en Matlab à partir des fichiers fournis pour chaque question et valent 15 points chacune (voir le point 6).**
7. **En plus de la question bonus, vous devez répondre à des questions au choix pour totaliser 105 points avec les contraintes suivantes :**
   (a) **Au minimum une question Matlab : 1 question bonus + 90 points de questions manuelles + 1 question Matlab.**
   OU
   (b) **Au maximum deux questions Matlab : 1 question bonus + 75 points de questions manuelles + 2 questions Matlab.**
8. **La note maximale pour cet examen est donc 110 %.**
9. **Ne perdez pas votre temps à essayer toutes les questions. Commencez par les plus faciles.**
10. **Si vous avez le temps de répondre à plus de questions que demandées, le tout sera corrigé et optimisé à la hausse (les moins bonnes seront enlevées, la question de 30 points pourrait être ramenée à 15 points si cela est avantageux).**
11. **Les points ne sont pas transférables d'une question à l'autre (exemple : 2 questions à moitié répondues ne donnent pas une question répondue).**
12. QUESTIONS MANUELLES : CHAQUE ÉTAPE DE CALCUL EST OBLIGATOIRE MÊME SI VOUS AVEZ MATLAB POUR VOUS VÉRIFIER. À moins que ce soit nécessaire pour démontrer votre compréhension, vous n'avez pas à écrire les calculs arithmétiques de base. Exemple : multiplier 2 matrices nécessite d'additionner des multiplications. Dans un cas comme ça ce n'est pas nécessaire.
13. VOTRE SOUMISSION : Dans un répertoire compressé (zippé) : 1) Réponses manuelles en fichier PDF 2) fichiers Matlab ou Octave 3) l'image compressée si vous avez choisi cette question

1. **(5 points) BONUS - QUESTIONS DE COMPRÉHENSION** : 1 point par bonne réponse, 5, 6 ou 7 bonnes réponses sur 7 donnent 5 points. **Les calculs ne sont pas exigés.**

   (a) Une matrice est inversible si son déterminant est différent de ____ (un nombre).

   (b) Deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est égal à ____ (un nombre).

   (c) Quelles sont les valeurs **propres** de la matrice A :

   $$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

   (d) Quel est le déterminant de la matrice A :

   $$A = \begin{bmatrix} 2a & 2a & 2a & 2a \\ a & a & a & a \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

   (e) Qui suis-je? Je suis une matrice toujours diagonalisable, toujours diagonalisable orthogonalement, dont les valeurs propres sont toujours réelles et dont la décomposition spectrale est possible. Je suis une matrice ________ (un mot).

   (f) Quels est l'intervalles (axe réel seulement) de l'estimation de la valeur propre centrée à 6 de la matrice A en utilisant la technique des disques de Gerschgorin. Vous pouvez utiliser une notation du style $valeur \pm rayon$:

   $$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1+i \\ 2 & a & b \\ i & c & d \end{bmatrix}$$

   (g) Toute matrice $n \times n$ admettant n valeurs propres ________ est diagonalisable (un mot).

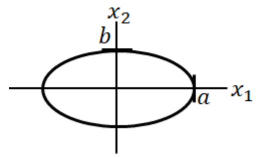

Figure 1: Ellipse - Question 2-a)

2. **(15 points) DÉTERMINANTS (manuel)**

   (a) (2 points) L'aire d'une ellipse (figure 1) est donnée par $Aire = \pi ab$

   i. Si $a = 2$ et $b = 1$, utilisez le déterminant pour calculer la nouvelle aire si on applique à l'ellipse la transformation représentée par la matrice T?

   $$T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

   (b) (4 points) Résoudre le système A**x**=**b** avec la méthode de Cramer.

   $$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

   (c) (9 points) Inverse d'une matrice. Soit la matrice A :

   $$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

   i. (1 points) Calculez le déterminant de A.
   ii. (3 points) Calculez la matrice des cofacteurs de A.
   iii. (2 points) Donnez la matrice adjointe de A.
   iv. (3 points) Calculez l'inverse de A à l'aide des éléments que vous venez de calculer.

3. **(15 points) VALEURS PROPRES (manuel)**

   (a) (3 points) Quel est le polynôme caractéristique de A (au choix, sous forme d'un polynôme ou sous forme factorisée)?

   $$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

   (b) (4 points) Quelles sont les valeurs propres de la matrice précédente?

   (c) (8 points) Soit la matrice A. Déterminez, pour la valeur propre $\lambda = 5$, une base du sous-espace propre associé.

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

4. **(15 points) ORTHOGONALITÉ ET FACTORISATION QR (manuel)**

   (a) (7 points) Gram-Schmidt. Utilisez la méthode de Gram-Schmidt pour déterminer une base **orthogonale** de l'espace représenté par les col(A).

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) (8 points) Factorisation QR. W est une base **orthogonale** de col(A) obtenue avec la méthode de Gram-Schmidt. Déterminez une matrice Q et une matrice R tel que A = QR.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad W = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. **(15 points) DIAGONALISATION (manuel)**

(a) (8 points) La diagonalisation d'une matrice consiste à trouver une matrice P et une matrice D tel que $A = PDP^{-1}$. Calculez P et D pour la matrice A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) (7 points) Soit la matrice A dont les valeurs propres sont λ_1=3 et λ_2=1. Une base pour λ_1 est $\mathbf{v_1}$ et une base pour λ_2 est $\mathbf{v_2}$.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ 12 & -5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

À partir de ces informations, utilisez la diagonalisation pour calculer A^4.

6. **(15 points) MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS (manuel)**

Soit les points (θ, y) mesurés suivants : (0, 2), ($\frac{\pi}{4}$, 2), ($\frac{\pi}{2}$, 1). Les angles θ sont en *radians*. Trouvez la solution $\hat{\mathbf{x}}$ au sens des moindres carrés avec la méthode 1 qui approxime l'équation de la forme :

$y = a \cdot sin(\theta) + b \cdot cos(\theta)$ où :

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Conseil : conserver le symbole de la racine carrée $\sqrt{}$ jusqu'à la fin des calculs devrait vous permettre d'aller plus vite.

7. **(15 points) PSEUDOINVERSE ET MOINDRES CARRÉS (manuel)**

Soit le système A**x**=**b** suivant :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On vous fournit une décomposition en valeurs singulières de la matrice A, soit les matrice U, Σ et V :

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) (10 points) Calculez le pseudoinverse A^+.

(b) (5 points) Utilisez le résultat obtenu en (a) pour calculer la solution $\bar{\mathbf{x}}$ au sens des moindres carrés.

8. **(30 points) DÉCOMPOSITION EN VALEURS SINGULIÈRES (manuel)**

Déterminez une décomposition en valeurs singulières de la matrice A (on veut les matrices U, Σ et V) :

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

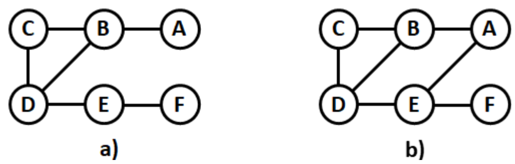

Figure 2: Graphe non orienté - Question 11

9. **(15 points) MATLAB : Compression d'image avec la SVD**

   Le fichier **carillon.m** lit et convertit l'image **carillon.bmp** pour la stockez dans la variable A.

   (a) Compressez l'image en utilisant la décomposition en valeurs singulières en ne gardant que les 7 valeurs singulières les plus grandes. Vous pouvez utiliser, au choix, la commande **svd()** ou la commande **svds()**. Si vous utilisez la commande svd(), vous devrez générer vous-même les nouvelles matrices U, S et V à partir de celles fournies par la commande svd().

   (b) **Calculez le taux de compression comme expliqué au cours.**

   (c) Ensuite, construisez une nouvelle image compressée A2. Le code d'affichage et de sauvegarde de la nouvelle image est déjà fourni.

   La commande **imshow(A2/255)** est déjà dans le fichier. Pour cette question, le hardcoding est accepté. **Insérez votre code dans le fichier carillon.m à l'endroit indiqué.**

10. **(15 points) MATLAB : Méthode de la puissance inverse**

    Implémentez l'algorithme de la puissance inverse pour calculer la valeur propre λ de la matrice A **la plus petite en valeur absolue**. On fournit la valeur de $\mathbf{x_0}$. Faites 10 itérations. À chaque itération **k**, affichez dans un vecteur $\mathbf{x_k}$ les valeurs propres, le vecteur $\mathbf{y_k}$ normalisé par rapport à la valeur propre la plus importante, ainsi que la valeur propre la plus importante $\mathbf{m_k}$. À la toute fin, affichez la valeur propre λ la plus petite de la matrice A. **Insérez votre code dans le fichier puissanceinv.m à l'endroit indiqué.**

    $$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -8 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

11. **(15 points) MATLAB : Classement (avec les valeurs propres et vecteurs propres)**

    La figure 2 représente un graphe **non orienté**. Chaque lien est donc **bidirectionnel**. Une connexion entre les noeuds A et B implique donc automatiquement une connexion entre les noeuds B et A.

    La matrice d'adjacence A Du graphe en a) vous est fournie dans le fichier **graphe.m** avec une valeur de 1 à chaque lien. On vous demande d'effectuer le classement des noeuds du graphe en utilisant les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice d'adjacence. Le code pour l'affichage et le tri est fourni en commentaires, vous devez le décommenter. **Vous devez insérer votre code dans le fichier graphe.m aux endroits indiqués pour chaque sous-question.**

    (a) Affichez le vecteur propre à utiliser pour le classement que vous nommerez **monVecteurPropre1**.

    (b) Classez les noeuds en ordre **décroissant** de connectivité, du plus connecté au moins connecté (code fourni dans **graphe.m** à décommenter).

    (c) Modifiez la matrice d'adjacence A pour ajouter un lien bidirectionnel de valeur 1 entre les noeuds A et E, tel qu'illustré sur la figure b), et affichez la nouvelle matrice d'adjacence.

    (d) Affichez le vecteur propre à utiliser pour le nouveau classement que vous nommerez **monVecteur-Propre2**.

    (e) Classez les noeuds en ordre **décroissant** de connectivité, du plus connecté au moins connecté (code fourni dans **graphe.m** à décommenter).

(f) Affichez les classements pour les deux graphes (code fourni dans **graphe.m** à décommenter.

(g) Y a-t-il un noeud dont l'ordre de classement a été amélioré ? Si oui, quel noeud ? Répondez en affichant un commandaire à l'écran avec la commande **disp('Ma réponse')**.

Pour cette question, le hardcoding est accepté. **Insérez votre code dans le fichier graphe.m aux endroits indiqués.**

Joyeux Noël et Bonne Année 2021 !

The End.