

**MAT-2930 Algèbre linéaire appliquée**  
**Examen Partiel - Automne 2021**  
**21 Octobre 2021 de 13h30 à 15h30 (120 minutes)**  
**Professeur : Mohamed Haj Taieb**

---

Cet examen comporte 6 questions sur 13 pages (incluant celle-ci), comptabilisées sur un total de 100 points. L'examen compte pour 35% de la note totale pour la session.

- Vous avez droit à une feuille manuscrite recto-verso en format lettre, ainsi qu'une calculatrice acceptée ;
- **Inscrivez votre nom** et votre numéro de dossier étudiant en bas de cette page ;
- Assurez-vous d'avoir toutes les pages ;
- **Le verso** : sert de brouillon et ne va pas être corrigé
- SVP sortez votre carte étudiante et placez-la visiblement sur votre table de travail ;

| Question | Points | Score |
|----------|--------|-------|
| 1        | 10     |       |
| 2        | 15     |       |
| 3        | 15     |       |
| 4        | 15     |       |
| 5        | 25     |       |
| 6        | 20     |       |
| Total:   | 100    |       |

|              |                            |
|--------------|----------------------------|
| <b>Nom :</b> | <b>Numéro de dossier :</b> |
|--------------|----------------------------|

1. (10 points) Vrai ou Faux ? Sans justification

Écrire vrai ou faux face à chaque phrase.

- (a) (1 point) Les coordonnées homogènes sont nécessaires pour effectuer la rotation d'une image dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ .
- (b) (1 point) Les lignes d'une matrice  $A$  inversible forment un ensemble de vecteurs linéairement indépendants.
- (c) (1 point) Pour deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ , si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  alors  $\|u + v\|^2 < \|u\|^2 + \|v\|^2$
- (d) (1 point) Prenons une matrice  $A (m \times m)$  non singulière. Soit  $B$  et  $C$  deux matrices  $m \times m$  tel que  $AB = AC$  alors on a forcément  $B = C$ .
- (e) (1 point) On peut avoir un système linéaire avec exactement 2 solutions.
- (f) (1 point) Considérer 2 matrices équivalentes en ligne  $A$  et  $B$ . Ces 2 matrices ont le même équivalent en ligne en forme échelon réduit.
- (g) (1 point) Le rang d'une matrice correspond au nombre de ligne nulle dans sa forme échelon.
- (h) (1 point) La solution triviale pour un système linéaire homogène correspond au vecteur nul.
- (i) (1 point) La méthode itérative de Jacobi converge plus rapidement que la méthode itérative de Gauss-Seidel.
- (j) (1 point) Soit une matrice  $A (m \times m)$  non inversible. Alors forcément le rang de  $A$  est inférieur à  $m$ .

**Solution:**

- (a) Faux
- (b) Vrai
- (c) Faux
- (d) Vrai
- (e) Faux
- (f) Vrai
- (g) Faux
- (h) Vrai
- (i) Faux
- (j) Vrai

2. (15 points) Factorisation  $LU$  et  $P^T LU$

(a) (8 points) En utilisant la factorisation  $LU$ , résoudre  $Ax = b$  avec

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} \text{ et } b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**Solution:**

8 points)  $A = LU$

2 pts

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3/2 & -1/4 & 1 \end{bmatrix}$$

2 pts

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 5.5 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 - 2L_1 \\ L_3 - \frac{3}{2}L_1 \end{matrix} \Rightarrow U = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

1 pt

$$AX = b \Rightarrow LUX = b \Rightarrow LY = b$$

$$LY = b \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \\ 2y_1 + y_2 = 0 \\ \frac{3}{2}y_1 - \frac{1}{4}y_2 + y_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = -4 \\ y_3 = -3 \end{cases}$$

15 pt

$$UX = Y \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -4x_2 + 6x_3 = -4 \\ 7x_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3/7 \\ x_2 = 5/14 \\ x_3 = -3/7 \end{cases}$$

Rep. 45 pt

(b) (7 points) Donner une décomposition  $P^T LU$  de la matrice  $C$  :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

**Solution:**

7 points

$$b) \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \quad 1 \text{ pt}$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix} \quad L_3 + L_1$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -16 \end{bmatrix} \quad L_3 - 5L_2$$

$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} PA &= LU \\ A &= P^T LU \end{aligned}$$

$$\text{où } P^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 2 \text{ pts}$$

$$L = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et } U = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -16 \end{bmatrix}$$

2 pts

2 pts

## 3. (15 points) Transformation linéaire

Soit la transformation  $T$  suivante  $T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z \\ y+z \\ x+y \end{bmatrix}$

(a) (5 points) Montrer que la transformation  $T$  est linéaire.

**Solution:**

$$\text{a/ Soit } \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \text{ et } \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bullet T(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) &= T \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + z_1 + z_2 \\ y_1 + y_2 + z_1 + z_2 \\ x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \end{bmatrix} \\ &\stackrel{2,5 \text{ pts}}{=} \begin{bmatrix} x_1 + z_1 \\ y_1 + z_1 \\ x_1 + y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 + z_2 \\ y_2 + z_2 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix} \\ &= T(\vec{u}_1) + T(\vec{u}_2) \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet T(c \vec{u}_1) &= T \begin{bmatrix} c(x_1) \\ c(y_1) \\ c(z_1) \end{bmatrix} \quad \text{où } c \in \mathbb{R} \\ &\stackrel{2,5 \text{ pts}}{=} \begin{bmatrix} cx_1 + cz_1 \\ cy_1 + cz_1 \\ cx_1 + cy_1 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} x_1 + z_1 \\ y_1 + z_1 \\ x_1 + y_1 \end{bmatrix} \\ &= c T(\vec{u}_1) \quad (2) \end{aligned}$$

(1) + (2)  $\Rightarrow T$  est une transformation linéaire

(b) (5 points) Donner la matrice  $A$  canoniquement associée à la transformation  $T$ .

**Solution:**

$$b) \quad T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \Rightarrow A_{3 \times 3}$$

$$\text{ou } A = [T(\vec{e}_1) \quad T(\vec{e}_2) \quad T(\vec{e}_3)]$$

$$\bullet \quad T(\vec{e}_1) = T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \quad T(\vec{e}_2) = T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 5 \text{ pts}$$

$$\bullet \quad T(\vec{e}_3) = T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) La transformation du vecteur  $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$  est donnée par le vecteur  $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$  c'est-à-dire :

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + z_1 \\ y_1 + z_1 \\ x_1 + y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

i. (1 point) Déterminer  $x_1$ ,  $y_1$  et  $z_1$  en fonction de  $x_2$ ,  $y_2$  et  $z_2$ .

**Solution:**

$$x_1 = \frac{x_2 - y_2 + z_2}{2}$$

$$y_1 = \frac{-x_2 + y_2 + z_2}{2}$$

$$z_1 = \frac{x_2 + y_2 - z_2}{2}$$

- ii. (1 point) En déduire la transformation  $U$  qui transforme  $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$  en  $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$  c'est-à-dire :

$$U \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

**Solution:**

$$U \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_2 - y_2 + z_2}{2} \\ \frac{-x_2 + y_2 + z_2}{2} \\ \frac{x_2 + y_2 - z_2}{2} \end{bmatrix}$$

- iii. (2 points) Donner la matrice  $B$  canoniquement associée à la transformation  $U$ .

**Solution:**

$$B = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

- iv. (1 point) En déduire  $A^{-1}$ . ( $A$  est la matrice associée à la transformation  $T$ ).

**Solution:**

$$A^{-1} = B = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

## 4. (15 points) Système linéaire

Soit la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 6 & -9 \end{bmatrix}$$

- (a) (3 points) Pour quelle(s) valeur(s) de  $b_1$  dans  $\mathbb{R}$  le système  $Ax = \begin{bmatrix} b_1 & -5 & 9 \end{bmatrix}^T$  est consistant ?

**Solution:**

(a) 
$$\left[ \begin{array}{cc|c} -2 & 3 & b_1 \\ -1 & 2 & -5 \\ 6 & -9 & 9 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \left[ \begin{array}{cc|c} -1 & 2 & -5 \\ -2 & 3 & b_1 \\ 6 & -9 & 9 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{L_3 + 3L_1} \left[ \begin{array}{cc|c} -1 & 2 & -5 \\ -2 & 3 & b_1 \\ 0 & 0 & 9 + 3b_1 \end{array} \right]$$

Si  $9 + 3b_1 = 0 \Rightarrow$  consistant

$$b_1 = -3$$

- (b) (3 points) Donner la ou les solutions de ce système dans le cas où il est consistant.

**Solution:**

(b) 
$$\left[ \begin{array}{cc|c} -1 & 2 & -5 \\ -2 & 3 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 + 2L_1} \left[ \begin{array}{cc|c} -1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\frac{1}{2}x_2 = -7/2$$
  

$$x_2 = -7$$

$$-2x_1 + 3(-7) = -3$$
  

$$x_1 = -9$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -7 \end{bmatrix}$$

- (c) (1 point) La matrice  $A$  est-elle inversible ? Justifier votre réponse.

**Solution:**

$A$  n'est pas inversible. L'inversion matricielle n'existe pas pour une matrice rectangulaire.

- (d) (2 points) Calculer le rang de la matrice  $A$ .

**Solution:**

$\text{rang}(A) = 2$  car on a 2 colonnes pivot dans l'équivalent en ligne réduit.

- (e) (2 points) Déterminer une base pour le sous-espace des colonnes de  $A$ ,  $\text{Col } A$ .

**Solution:** Les vecteurs colonnes de la matrice  $A$  associés aux positions des colonnes

pivots :

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -9 \end{bmatrix}$$

- (f) (2 points) Quelle est la dimension du sous-espace Nul A ? Justifier votre réponse.

**Solution:**

$\dim \text{Nul } A = 0$  car 0 colonnes non-pivot (ou 0 variable libre).

- (g) (2 points) Déterminer un vecteur qui appartient au sous-espace Nul A.

**Solution:**

Vecteur du sous-espace Nul A :  $\vec{0}$  car  $A\vec{0} = \vec{0}$ . D'ailleurs c'est le seul vecteur car  $\dim \text{Nul } A = 0$ .

## 5. (25 points) Transformation linéaire

Pour les transformations linéaires de  $\mathbb{R}^2$  vers  $\mathbb{R}^2$  suivantes calculer la matrice de transformation.

- (a) (3 points) Matrice  $F$  de réflexion autour de l'axe des  $y$ .

**Solution:**

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (b) (3 points) Matrice  $D$  qui étire la composante  $x$  par facteur 2 et la composante  $y$  par 3.

**Solution:**

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- (c) (5 points) Matrice  $R$  de rotation horaire de  $30^\circ$  autour de l'origine.

**Solution:**

$$R = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

- (d) (5 points) Matrice  $P$  de projection sur la ligne  $y = -x$ .

**Solution:**

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

- (e) (9 points) Matrice de la transformation composite  $C$  de la rotation antihoraire de  $60^\circ$  suivie de la réflexion autour de l'axe  $y = x$ .

**Solution:**

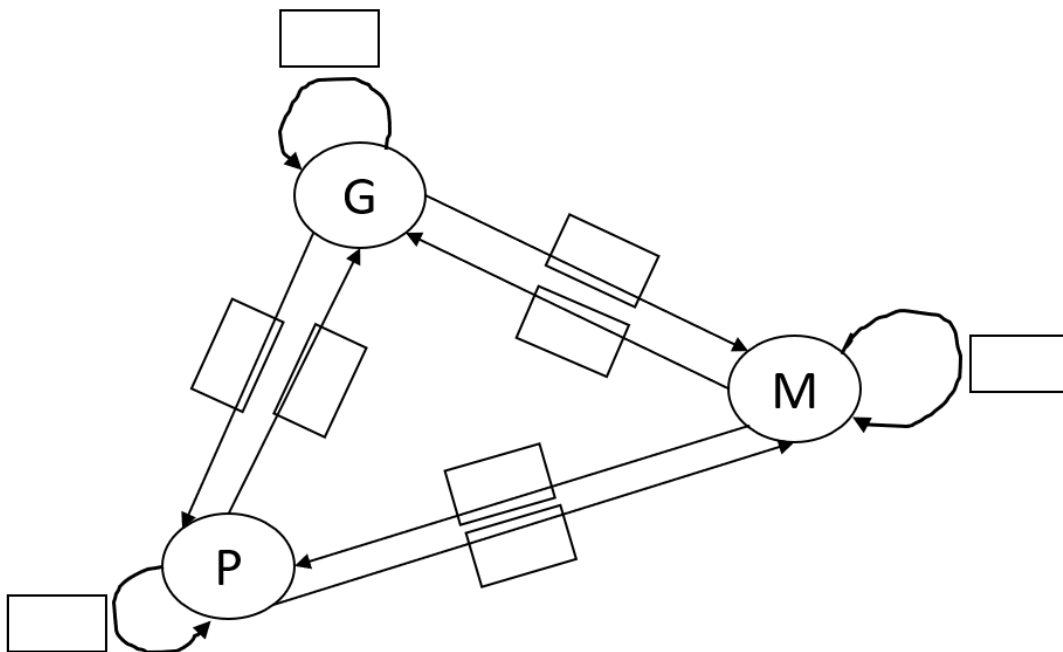
$$C = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

## 6. (20 points) Chaîne de Markov

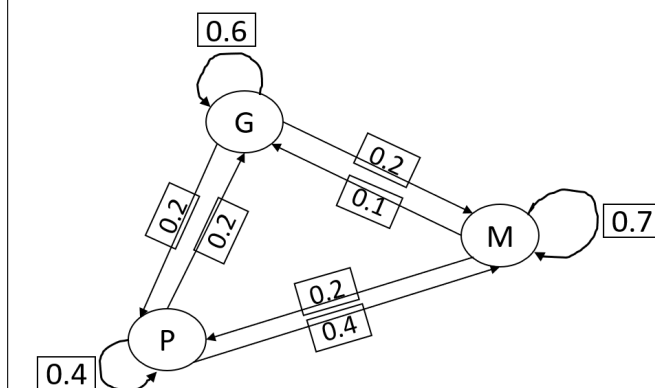
Des données ont été accumulées sur la taille des enfants par rapport à celle de leurs parents stipulent que

- Les probabilités qu'un parent de **grande (G)** taille ait un enfant de grande, moyenne ou petite taille sont respectivement de 0.6, 0.2 et 0.2.
- Les probabilités qu'un parent de **moyenne (M)** taille ait un enfant de grande, moyenne ou petite taille sont respectivement de 0.1, 0.7 et 0.2.
- Les probabilités qu'un parent de **petite (P)** taille ait un enfant de grande, moyenne ou petite taille sont respectivement de 0.2, 0.4 et 0.4.

- (a) (3 points) Compléter le graphe de la chaîne de Markov en inscrivant les différentes probabilités de transition dans les rectangles de la figure suivante.



**Solution:**



- (b) (3 points) Déterminer la matrice stochastique  $P$  décrivant cette chaîne de Markov.

**Solution:**

$$P = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.7 & 0.4 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$

- (c) (2 points) Sans utiliser la chaîne de Markov calculer la probabilité qu'une personne de petite taille aie un petit enfant de grande taille.

**Solution:**

$$0.4 \times 0.2 + 0.4 \times 0.2 + 0.2 \times 0.6 = 0.24$$

- (d) (4 points) Utiliser la matrice  $P$  de la chaîne de Markov pour déterminer la probabilité qu'une personne de petite taille aie un petit enfant de grande taille.

**Solution:**

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = P x_0 = \dots = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = P x_1 = \dots = \begin{bmatrix} 0.24 \\ 0.48 \\ 0.28 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$  la réponse est 0.24 ou 24%

- (e) (8 points) Quelle sera la proportion de la taille de la population à long terme.

**Solution:**

Ici, on cherche  $q$ , le vecteur d'état stationnaire tel que  $Pq = q$

on résoud  $(P-I)x = 0$  ou  $(I-P)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 1-0.6 & -0.1 & -0.2 & | & 0 \\ -0.2 & 1-0.7 & -0.4 & | & 0 \\ -0.2 & -0.2 & 1-0.4 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0.4 & -0.1 & -0.2 & | & 0 \\ -0.2 & 0.3 & -0.4 & | & 0 \\ -0.2 & -0.2 & 0.6 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & | & 0 \\ -2 & 3 & -4 & | & 0 \\ -2 & -2 & 6 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 2.5 & -5 & | & 0 \\ 0 & -2.5 & 5 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_2 + \frac{1}{2} L_1 \\ L_3 + \frac{1}{2} L_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 2.5 & -5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} L_3 + L_2$$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 & x_1 = \frac{x_2 + 2x_3}{4} \\ 2.5x_2 - 5x_3 = 0 & \Rightarrow x_2 = 2x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}$$

De plus  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

$$x_3 + 2x_3 + x_3 = 1$$

$$x_3 = \frac{1}{4}$$

Ainsi  $x = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{bmatrix} \Rightarrow q = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{bmatrix}$

À long terme, 50% de la population est de taille moyenne, 25% de grande taille et 25% de petite taille.