**MAT-2930 Algèbre linéaire appliquée**
**Examen Partiel - Automne 2021**
**21 Octobre 2021 de 13h30 à 15h30 (120 minutes)**
**Professeur : Mohamed Haj Taieb**

---

Cet examen comporte 6 questions sur 14 pages (incluant celle-ci), comptabilisées sur un total de 100 points. L'examen compte pour 35% de la note totale pour la session.

- Vous avez droit à une feuille manuscrite recto-veso en format lettre, ainsi qu'une calculatrice acceptée ;
- **Inscrivez votre nom** et votre numéro de dossier étudiant en bas de cette page ;
- Assurez-vous d'avoir toutes les pages ;
- **Le verso** : sert de brouillon et ne va pas être corrigé
- SVP sortez votre carte étudiante et placez-la visiblement sur votre table de travail ;

| Question | Points | Score |
|---|---|---|
| 1 | 10 | |
| 2 | 15 | |
| 3 | 15 | |
| 4 | 15 | |
| 5 | 25 | |
| 6 | 20 | |
| Total: | 100 | |

| **Nom :** | **Numéro de dossier :** |
|---|---|
| | |

1. (10 points) Vrai ou Faux ? Sans justification

   Écrire vrai ou faux face à chaque phrase.

   (a) (1 point) Les coordonnées homogènes sont nécessaires pour effectuer la rotation d'une image dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

   (b) (1 point) Les lignes d'une matrice A inversible forment un ensemble de vecteurs linéairement indépendants.

   (c) (1 point) Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$, si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ alors $\|u+v\|^2 < \|u\|^2 + \|v\|^2$

   (d) (1 point) Prenons une matrice $A\,(m \times m)$ non singulière. Soit $B$ et $C$ deux matrices $m \times m$ tel que $AB = AC$ alors on a forcément $B = C$.

   (e) (1 point) On peut avoir un système linéaire avec exactement 2 solutions.

   (f) (1 point) Considérer 2 matrices équivalentes en ligne $A$ et $B$. Ces 2 matrices ont le même équivalent en ligne en forme échelon réduit.

   (g) (1 point) Le rang d'une matrice correspond au nombre de ligne nulle dans sa forme échelon.

   (h) (1 point) La solution triviale pour un système linéaire homogène correspond au vecteur nul.

   (i) (1 point) La méthode itérative de Jacobi converge plus rapidement que la méthode itérative de Gauss-Seidel.

   (j) (1 point) Soit une matrice $A\,(m \times m)$ non inversible. Alors forcément le rang de $A$ est inférieur à $m$.

2. (15 points) Factorisation $LU$ et $P^TLU$
   (a) (8 points) En utilisant la factorisation $LU$, résoudre $Ax = b$ avec

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} \text{ et } b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) (7 points) Donner une décomposition $P^T LU$ de la matrice $C$ :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

3. (15 points) Transformation linéaire

   Soit la transformation $T$ suivante $T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z \\ y+z \\ x+y \end{bmatrix}$

   (a) (5 points) Montrer que la transformation $T$ est linéaire.

(b) (5 points) Donner la matrice $A$ canoniquement associée à la transformation $T$.

(c) La transformation du vecteur $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ est donnée par le vecteur $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$ c'est-à-dire :

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + z_1 \\ y_1 + z_1 \\ x_1 + y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

i. (1 point) Déterminer $x_1$, $y_1$ et $z_1$ en fonction de $x_2$, $y_2$ et $z_2$.

ii. (1 point) En déduire la transformation $U$ qui transforme $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ c'est-à-dire :

$$U \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

iii. (2 points) Donner la matrice $B$ canoniquement associée à la transformation $U$.

iv. (1 point) En déduire $A^{-1}$. ($A$ est la matrice associée à la transformation $T$ : voir (b)).

4. (15 points) Système linéaire
   Soit la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 6 & -9 \end{bmatrix}$$

   (a) (3 points) Pour quelle(s) valeur(s) de $b_1$ dans $\mathbb{R}$ le système $Ax = \begin{bmatrix} b_1 & -5 & 9 \end{bmatrix}^T$ est consistant ?

   (b) (3 points) Donner la ou les solutions de ce système dans le cas où il est consistant.

(c) (1 point) La matrice $A$ est-elle inversible ? Justifier votre réponse.

(d) (2 points) Calculer le rang de la matrice A.

(e) (2 points) Déterminer une base pour le sous-espace des colonnes de $A$, Col $A$.

(f) (2 points) Quelle est la dimension du sous-espace Nul A ? Justifier votre réponse.

(g) (2 points) Déterminer un vecteur qui appartient au sous-espace Nul A.

5. (25 points) Transformation linéaire
   Pour les transformations linéaires de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ suivantes calculer la matrice de transformation.
   (a) (3 points) Matrice $F$ de réflection autour de l'axe des $y$.

   (b) (3 points) Matrice $D$ qui étire la composante $x$ par facteur 2 et la composante $y$ par 3.

   (c) (5 points) Matrice $R$ de rotation horaire de 30° autour de l'origine.

   (d) (5 points) Matrice $P$ de projection sur la ligne $y = -x$.

(e) (9 points) Matrice de la transformation composite $C$ de la rotation antihoraire de $60°$ suivie de la reflexion autour de l'axe $y = x$ .

6. (20 points) Chaîne de Markov

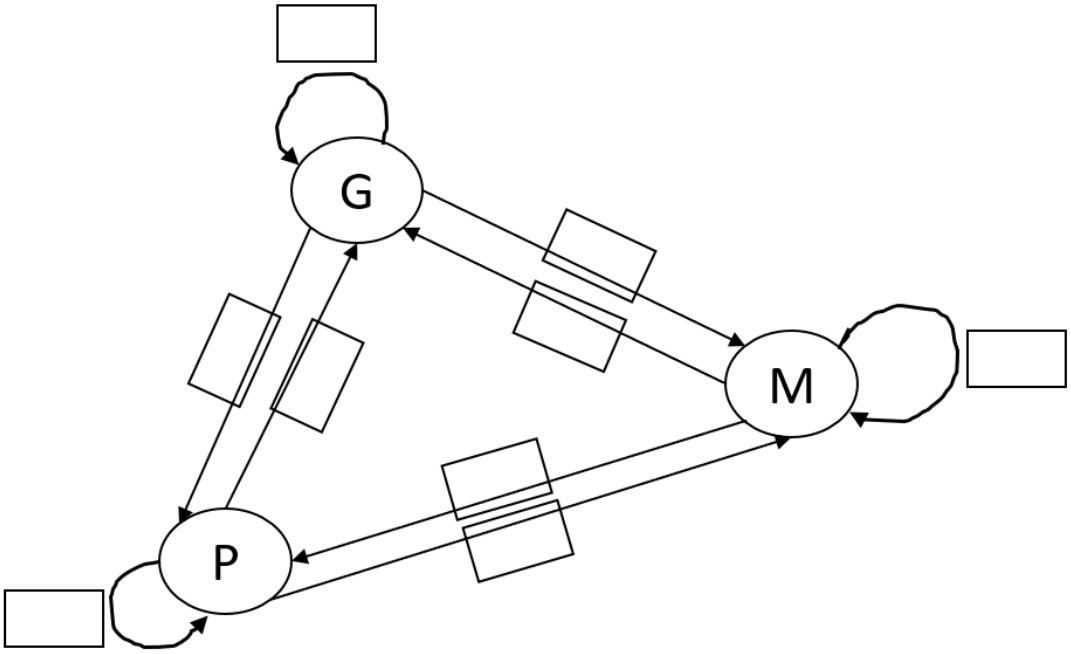
Des données ont été accumulées sur la taille des enfants par rapport à celle de leurs parents stipulent que

— Les probabilités qu'un parent de **grande (G)** taille ait un enfant de grande, moyenne ou petite taille sont respectivement de 0.6, 0.2 et 0.2.

— Les probabilités qu'un parent de **moyenne (M)** taille ait un enfant de grande, moyenne ou petite taille sont respectivement de 0.1, 0.7 et 0.2.

— Les probabilités qu'un parent de **petite (P)** taille ait un enfant de grande, moyenne ou petite taille sont respectivement de 0.2, 0.4 et 0.4.

(a) (3 points) Compléter le graphe de la chaîne de Markov en inscrivant les différentes probabilités de transistion dans les rectangles de la figure suivante.




(b) (3 points) Déterminer la matrice stochastique $P$ décrivant cette chaîne de Markov.

(c) (2 points) Sans utiliser la chaîne de Markov calculer la probabilité qu'une personne de petite taille aie un petit enfant de grande taille.

(d) (4 points) Utiliser la matrice $P$ de la chaîne de Markov pour déterminer la probabilité qu'une personne de petite taille aie un petit enfant de grande taille.

(e) (8 points) Quelle sera la proportion de la taille de la population à long terme.